Capítulo 9

La Transformada de Fourier

En este capítulo estudiaremos otra de las transformadas integrales que es ampliamente utilizada tanto en matemáticas puras y aplicadas como en algunos campos de la ingeniería. Nos referimos a la transformada de Fourier la cual es, además, una potente herramienta para resolver ecuaciones en derivadas parciales. La idea básica de la transformada de Fourier en lo referente a las EDPs es la misma que en el caso de la de Laplace, esto es, transformar un problema complicado en otro más fácil de resolver y luego obtener la solución del problema original como la transformada de Fourier inversa de la solución del problema transformado.

Veremos también que la transformada de Fourier es una herramienta básica en el análisis de señales aperiódicas que tienen energía finita. En este sentido, la transformada de Fourier juega el mismo papel que las series de Fourier para señales periódicas.

9.1 Definición y Propiedades Básicas

Antes de dar la definición rigurosa de transformada de Fourier, vamos a motivar dicha definición a partir de las series de Fourier. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, una función dada. Para cada $l>0$ podemos calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función f el cual, en su forma compleja y suponiendo suficiente regularidad en la función f, viene dado por

$$f(x)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{nl}e^{\mathbf{i}n\pi x/l},\quad \text{con } c_{nl}=\int_{-l}^{l}f(y)\,e^{-\mathbf{i}n\pi y/l}\,dy.$$

Con el cambio $\xi_n=\frac{n\pi}{l}$ las expresiones anteriores se reescriben como

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{nl}e^{\mathbf{i}\xi_n x}\frac{\pi}{l},\quad c_{nl}=\int_{-l}^{l}f(y)\,e^{-\mathbf{i}\xi_n y}\,dy. \tag{9.1}$$

Si suponemos que f decae muy rápidamente cuando $|x|\to\pm\infty$, entonces

$$c_{nl}\approx\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,e^{-\mathbf{i}\xi_n y}\,dy$$

y a medida que $l\to\infty$ la primera expresión en (9.1) tiene el aspecto de una suma de Riemann. De esta forma, haciendo tender $l\to\infty$ se tiene que

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,e^{\mathbf{i}\xi x}\,dx,\quad \text{con } \widehat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,e^{-\mathbf{i}\xi y}\,dy.$$

Los coeficientes de Fourier c_{nl} pasan a tener la forma $\widehat{f}(\xi)$ que es lo que enseguida llamaremos transformada de Fourier de la función f. Tenemos pues que la transformada de Fourier es, en el sentido anterior, lo que equivale a los coeficientes de Fourier de una función periódica. Dicho de otra forma, la transformada de Fourier juega el mismo papel para funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ (o de periodo infinito si se quiere) que las series de Fourier para funciones periódicas o definidas en un intervalo acotado. Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 9.1.1 *Dada una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *se define formalmente su transformada de Fourier como la función de variable real* $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *definida como*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x} f(x)\ dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

Nota 9.1.1 La definición anterior es *formal* en el sentido de que la integral que aparece en dicha definición no tiene porque existir para una f cualquiera. La convergencia de dicha integral está garantizada en caso de ser f absolutamente integrable, es decir, si consideramos el espacio

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\ dx < \infty \right\},$$

entonces la transformada de Fourier de f está bien definida siempre que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Recordemos que $L^1(\mathbb{R})$, equipado de la norma

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\ dx$$

es un espacio de Banach. En realidad, la integral que aparece en (9.2) no se entiende en sentido de Riemann impropio sino en el sentido de Lebesgue. Lo mismo sucede en la definición del espacio $L^1(\mathbb{R})$. Sin embargo, si f es continua a trozos y si existen los límites y son finitos

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 |f(x)|\ dx \quad \text{y} \quad \lim_{b \to +\infty} \int_0^b |f(x)|\ dx,$$

es decir, si $|f|$ es integrable en sentido de Riemann impropio, entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y por tanto existe la transformada de Fourier de f la cual viene dada por (9.2). A efectos de cálculo, en este capítulo entenderemos que las funciones que consideramos son absolutamente integrables en sentido de Riemann impropio.

Nota 9.1.2 Señalemos también que hay una gran diversidad en la bibliografía en lo que hace referencia al término $\frac{1}{2\pi}$ que aparece en la definición de la transformada de Fourier. Hay autores que incluyen esta constante y autores que prescinden de ella. Es una cuestión de gustos. Por supuesto en nada afecta ésto a la teoría que desarrollaremos a continuación.

Calcularemos ahora la transformada de Fourier de algunas funciones concretas.

Ejemplo 9.1.1 *Consideremos la función característica del intervalo* $[a, b]$, *con* $-\infty < a < b < +\infty$, *esto es, la función*

$$\mathcal{X}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } a \le x \le b \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Si aplicamos la fórmula (9.2) se tiene que

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{X}_{[a,b]}\right]^{\wedge}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-\mathbf{i}\xi x}\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-\mathbf{i}\xi x}}{-\mathbf{i}\xi}\right|_a^b \\ &= \frac{e^{-\mathbf{i}\xi a}-e^{-\mathbf{i}\xi b}}{2\pi\mathbf{i}\xi}\end{aligned}$$

siempre que $\xi \neq 0$, *y* $\left[\mathcal{X}_{[a,b]}\right]^{\wedge}(0) = \frac{b-a}{2\pi}$. *En el caso particular de ser* $a = -b$, $b > 0$, *se tiene que*

$$\left[\mathcal{X}_{[-b,b]}\right]^{\wedge}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\xi b)}{\pi\xi} & si \quad \xi \neq 0. \\ \frac{b}{\pi} & si \quad \xi = 0. \end{cases} .$$

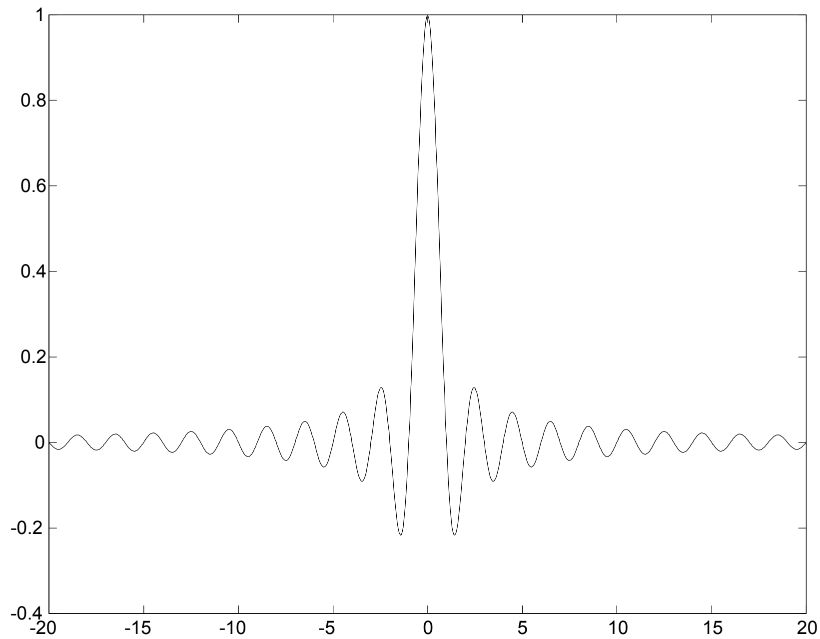


Figura 9.1: Gráfica de la función $\left[\mathcal{X}_{[-1,1]}\right]^{\wedge}(\cdot)$.

Ejemplo 9.1.2 *Consideremos ahora la función*

$$f(x) = e^{-x^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty.$$

De la fórmula (9.2) se deduce que

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x}e^{-x^2}\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{\mathbf{i}\xi}{2}\right)^2-\frac{\xi^2}{4}}\ dx \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{4}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{\mathbf{i}\xi}{2}\right)^2}\ dx.\end{aligned}$$

Demostraremos ahora que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{\mathbf{i}\xi}{2}\right)^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Para ello partimos de la identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

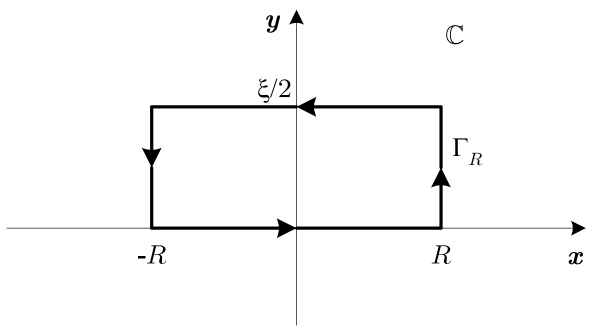
la cual es una consecuencia inmediata del hecho de ser

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dxdy = \pi.$$

Esta última identidad se demuestra fácilmente haciendo un cambio a coordenadas polares. Volvamos al cálculo de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{\mathbf{i}\xi}{2}\right)^2}\, dx$. *Supongamos que* $\xi > 0$. *Si* $\xi < 0$, *el razonamiento que sigue es completamente análogo. Para cada* $R > 0$ *consideremos el camino* Γ_R *formado por la unión de los segmentos*

$$\begin{aligned}
\Gamma_R^1 &= \{z \in \mathbb{C} : z = x\ ,\ -R \le x \le R\}\,,\\
\Gamma_R^2 &= \{z \in \mathbb{C} : z = R + \mathbf{i}y\ ,\ 0 \le y \le \xi/2\}\,,\\
\Gamma_R^3 &= \left\{z \in \mathbb{C} : z = x + \mathbf{i}\tfrac{\xi}{2}\ ,\ -R \le x \le R\right\},\\
\Gamma_R^4 &= \{z \in \mathbb{C} : z = -R + \mathbf{i}y\ ,\ 0 \le y \le \xi/2\}
\end{aligned}$$

y orientado positivamente, esto es, en sentido contrario al de las agujas del reloj.



Dado que la función e^{-z^2} *es holomorfa en todo el plano complejo, por el Teorema de Cauchy se tiene que*

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma_R} e^{-z^2}\, dz\\
&= \int_{\Gamma_R^1} e^{-z^2}\, dz + \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2}\, dz - \int_{\Gamma_R^3} e^{-z^2}\, dz - \int_{\Gamma_R^4} e^{-z^2}\, dz.
\end{aligned}$$

Dado que sobre Γ_R^2 *y sobre* Γ_R^4 *se tiene que*

$$\left|e^{-z^2}\right| = e^{-R^2+y^2} \quad , \quad 0 \le y \le \xi/2,$$

entonces fácilmente se deduce que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2}\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^4} e^{-z^2}\, dz = 0.$$

Por otra parte,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^1} e^{-z^2}\ dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$$

y

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^3} e^{-z^2}\ dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\left(x+\frac{\mathbf{i}\xi}{2}\right)^2}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{\mathbf{i}\xi}{2}\right)^2}\ dx.$$

Con todo ello se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{\mathbf{i}\xi}{2}\right)^2}\ dx = \sqrt{\pi}$$

y por tanto,

$$\left[e^{-x^2}\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2/4}.$$

Enunciamos a continuación algunas de las propiedades básicas de la transformada de Fourier. Su demostración es un sencillo ejercicio de cálculo.

Proposición 9.1.1

(a) ***Linealidad.*** *Sean $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Entonces*

$$[\alpha f+\beta g]^{\wedge} = \alpha\widehat{f}+\beta\widehat{g}.$$

(b) ***Translación y cambio de escala.*** *Sean $f\in L^1(\mathbb{R})$ y $a,b\in\mathbb{R}$, con $a\neq 0$. Entonces la función $g(x)=f(ax+b)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y además*

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{|a|}e^{\frac{\mathbf{i}\xi b}{a}}\widehat{f}(\xi/a).$$

(c) ***Fórmula de Modulación.*** *Sean $f\in L^1(\mathbb{R})$ y $a\in\mathbb{R}$. Entonces la función $e^{\mathbf{i}ax}f\in L^1(\mathbb{R})$ y*

$$\left[e^{\mathbf{i}ax}f(x)\right]^{\wedge}(\xi) = \widehat{f}(\xi-a).$$

Como consecuencia,

$$[f(x)\cos ax]^{\wedge}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi-a)+\widehat{f}(\xi+a)}{2}$$

y

$$[f(x)\sin ax]^{\wedge}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi-a)-\widehat{f}(\xi+a)}{2\mathbf{i}}$$

9.1.1 La Transformada de Fourier y la Derivación

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función de clase C^1 a trozos y supongamos que tanto f como f' están en $L^1(\mathbb{R})$. Del teorema fundamental del cálculo y del hecho de estar f' en $L^1(\mathbb{R})$ se deduce que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(t)\ dt$$

existe y es finito. Además, como $f \in L^1(\mathbb{R})$, dicho límite ha de ser cero. De manera análoga se prueba que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Como consecuencia de ésto, e integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} [f']^{\wedge}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x} f'(x)\ dx \\ &= \frac{\mathbf{i}\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x} f(x)\ dx \\ &= \mathbf{i}\xi\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

En general se tiene que si $f, f', \cdots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces,

$$\left[f^{(n)}\right]^{\wedge}(\xi) = (\mathbf{i}\xi)^n \widehat{f}(\xi).$$

Por otra parte, si la función $xf(x)$ está en $L^1(\mathbb{R})$ y calculamos *formalmente* entonces

$$\begin{aligned} [xf(x)]^{\wedge}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\mathbf{i}\xi x} f(x)\ dx \\ &= \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi}\left(e^{-\mathbf{i}\xi x} f(x)\right)\ dx \\ &= \mathbf{i}\frac{d}{d\xi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x} f(x)\ dx \\ &= \mathbf{i}\left[\widehat{f}\right]'(\xi). \end{aligned}$$

En general, si $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$[x^n f(x)]^{\wedge}(\xi) = \mathbf{i}^n \frac{d^n}{d\xi^n}\widehat{f}(\xi).$$

9.1.2 La Transformada de Fourier y el Producto de Convolución

Nos ocuparemos a continuación de estudiar el comportamiento de la transformada de Fourier respecto del producto de convolución. Recordemos que dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se define el producto de convolución de f y g como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\ dy$$

siempre que la integral anterior exista. Una condición suficiente para la existencia de la convolución de dos funciones es que una de ellas esté en $L^1(\mathbb{R})$ y la otra en $L^p(\mathbb{R})$ para algún $1 \le p \le \infty$. De hecho, se puede probar (véase [1, Cap. IV]) que en este caso, es decir, si por ejemplo $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^p(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R})$. En particular, si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Por tanto, tiene sentido calcular su transformada de Fourier. Aplicando la definición de transformada de Fourier y calculando *formalmente* se tiene que

$$\begin{aligned} (f * g)^{\wedge}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x}(f * g)(x)\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\ dy\right)\ dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi(x-y)} f(x-y)\ dx \right) e^{-\mathbf{i}\xi y} g(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi z} f(z)\ dz \right) e^{-\mathbf{i}\xi y} g(y)\ dy \\
&= 2\pi \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

En resumen: si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$
(f * g)^{\wedge}(\xi) = 2\pi \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi).
$$

En la práctica usaremos este resultado en sentido inverso, es decir, habitualmente nos encontraremos con $\widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi)$, donde f y g son conocidas, y estaremos interesados en calcular una función h tal que $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi)$. El resultado anterior nos dice que esa tal función h no es sino $\frac{1}{2\pi}(f * g)$.

9.2 El Teorema de Plancherel y la Transformada Inversa de Fourier

En la sección anterior hemos visto que el dominio natural para definir la transformada de Fourier es el espacio de funciones $L^1(\mathbb{R})$. Pero, ¿cuál es su imagen o rango? ¿es inyectiva la transformada de Fourier? ¿y sobreyectiva?. En este caso, ¿cómo se calcula la transformada inversa?. De responder a todas estas cuestiones nos ocuparemos en esta sección.

Consideremos en primer lugar el espacio

$$
C_{\infty}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ ,\ f \text{ continua y } \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \right\},
$$

el cual equipado con la norma

$$
\|f\|_{\infty} = \sup \{ |f(x)| : x \in \mathbb{R} \}
$$

es un espacio de Banach. El resultado que sigue establece que la transformada de Fourier del espacio $L^1(\mathbb{R})$ está contenida en $C_{\infty}(\mathbb{R})$. Para una demostración véase [8, p. 217].

Lema 9.2.1 (Riemann-Lebesgue) *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in C_{\infty}(\mathbb{R})$. Además,*

$$
\left\| \widehat{f} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 .
$$

Nos ocuparemos ahora del problema de recuperar la función f a partir de su transformada de Fourier $\widehat{f}$. Para ello, dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define su *transformada inversa de Fourier* como

$$
\overset{\vee}{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}\xi x} f(\xi)\ d\xi
$$

Un primer resultado de inversión es el siguiente Teorema de Inversión de Fourier. Una demostración puede encontrarse en [8, p.p. 218-219].

Teorema 9.2.2 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y supongamos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $f = \left(\widehat{f}\right)^{\vee}$, es decir,*

$$
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}\xi x} \widehat{f}(\xi)\ d\xi \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{9.3}
$$

Como consecuencia de este teorema se tiene que la transformada de Fourier es inyectiva. De manera precisa:

Corolario 9.2.3 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\widehat{f} = \widehat{g}$. Entonces $f = g$.*

La fórmula (9.3) expresa una función f como una superposición continua de funciones exponenciales. En este sentido, la transformada de Fourier proporciona un análogo para funciones no periódicas de las series de Fourier para funciones periódicas.

Son *muchas* las funciones de L^1 cuya transformada de Fourier está también en L^1. Por ejemplo, si $f \in C^2(\mathbb{R})$ y si $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $(f'')^{\wedge}(\xi) = -\xi^2 \widehat{f}(\xi)$ es acotada. De esta forma, $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \frac{C}{|\xi|^2}$, lo que garantiza que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Sin embargo, es importante señalar también que la transformada de Fourier de algunas funciones importantes en las aplicaciones, como la considerada en el Ejemplo 9.1.1, no están en L^1 (ver Ejercicio 3). Resulta pues interesante obtener alguna otra versión del teorema de inversión anterior. Presentamos a continuación una de estas versiones que hace uso del concepto de valor principal (de Cauchy) de una integral. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se llama valor principal de f al número

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} f(x)\ dx$$

que denotamos por P.V.$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$. Es importante señalar que puede existir y ser finito P.V.$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ y sin embargo no existir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$. Sin embargo, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces existe P.V.$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Ya estamos en condiciones de enunciar una segunda versión del Teorema de Inversión de Fourier. Para la demostración véase [8, p.p. 220-221].

Teorema 9.2.4 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y supongamos que f es diferenciable a trozos. Entonces*

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi)\ d\xi = \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde

$$f(x+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x+h) \quad y \quad f(x-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x-h).$$

Nota 9.2.1 Nótese que dentro del teorema anterior si que tienen cabida funciones como la considerada en el Ejemplo 9.1.1.

Hasta ahora hemos desarrollado toda la teoría de la transformada de Fourier en el marco del espacio $L^1(\mathbb{R})$. Sin embargo, nuestra experiencia con las series de Fourier sugiere que el espacio $L^2(\mathbb{R})$ también ha de jugar algún papel importante en toda esta teoría de la transformada de Fourier. Esto es efectivamente cierto. Como veremos enseguida, es $L^2(\mathbb{R})$ y no $L^1(\mathbb{R})$ el espacio en el que la transformada de Fourier tiene un mejor comportamiento.

Veamos, en primer lugar, que la identidad de Parseval de las series de Fourier tiene también su análogo para la transformada de Fourier. Supongamos que $f, g, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces no es difícil probar que también $f, g, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$. Vamos a calcular el producto escalar de $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ en L^2. Haciendo uso del Teorema de Inversión de Fourier y calculando formalmente se tiene que

$$\begin{aligned}
< \widehat{f}, \widehat{g} >_{L^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \left(\overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x} g(x)\ dx} \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{\mathbf{i}\xi x}\ d\xi \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g}(x)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi} < f, g >_{L^2} .
\end{aligned}$$

En particular, si tomamos $f = g$, entonces

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 . \tag{9.4}$$

La identidad (9.4) es entendida en Teoría de la Señal como un *principio de conservación de la energía*. En efecto: $\|f\|_2^2$ representa físicamente la energía de la señal f en el dominio del tiempo, mientras que $\left\| \widehat{f} \right\|_2^2$ representa la energía en el dominio de las frecuencias.

Concluimos esta sección con el que es, a nivel teórico, el resultado más importante en la teoría de la transformada de Fourier. Una demostración puede encontrarse en [10, p.p. 158-161].

Teorema 9.2.5 (Plancherel) *La transformada de Fourier, definida en principio sobre $L^1 \cap L^2$, se extiende de manera única a una aplicación de L^2 en L^2. Además, esta aplicación es biyectiva y*

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 \quad \textit{para toda } f \in L^2.$$

El resultado de este teorema (como otros muchos en la teoría de la transformada de Fourier) se establece en primer lugar sobre el espacio de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \ f \in C^\infty \text{ y } \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m \frac{d^n f}{dx^n}(x) \right| \le c_{nm} < \infty,\ n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

y posteriormente se extiende por densidad a L^2. Por supuesto, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en L^2. Es importante señalar también que para funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es válida la formula (9.2) mediante la cual se define la transformada de Fourier. Sin embargo, para funciones de L^2 que no están en L^1 no es, en general, válida esta fórmula. A la extensión de la transformada de Fourier al espacio L^2 se le denomina transformada de Fourier-Plancharel.

9.3 Algunas Aplicaciones de la Transformada de Fourier

En esta sección estudiaremos algunas aplicaciones de la transformada de Fourier. En concreto, usaremos dicha transformada para resolver ciertos problemas de ecuaciones en derivadas parciales y también veremos alguna aplicación en Teoría de la Señal.

9.3.1 Teoría de la Señal

Supongamos que $f(t)$ representa la amplitud de una señal (una onda de sonido o una onda electromagnética, por ejemplo) en el instante de tiempo t. La fórmula

$$f(t) = \int \widehat{f}(\omega)\, e^{\mathbf{i}\omega t}\, dt \quad , \quad \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, dt$$

describe a f como una superposición de las ondas periódicas simples $e^{\mathbf{i}\omega t}$, donde ω cubre el rango de todas las posibles frecuencias. Esta representación es básica en el análisis de señales en ingeniería eléctrica. En esta sección nos limitaremos a mostrar algunas ideas subyacentes a la Teoría de la Señal y, en particular, veremos como las series de Fourier y la transformada de Fourier son una herramienta básica en este campo de la ingeniería.

En primer lugar, la potencia de la señal $f(t)$ es proporcional al cuadrado de su amplitud $|f(t)|^2$, y por tanto, la energía total de una señal es proporcional a $\int |f(t)|^2\, dt$. De esta forma, la condición de ser finita la energía total de la señal f significa simplemente que $f \in L^2$. Vemos, por tanto, que L^2 es un espacio que no sólo tiene muy buenas propiedades desde un punto de vista matemático (*es un Hilbert, y eso es mucho*) sino que también tiene una realidad física clara: es, en particular, el *espacio de las señales que tienen energía finita*.

En segundo lugar, los sistemas eléctricos pueden ser modelizados matemáticamente como operadores A que transforman una señal de entrada f en una señal de salida Af. Muchos de estos sistemas son (al menos en una primera aproximación) lineales, lo cual significa que el operador A es lineal. Además, la acción de estos sistemas no se ve afectada por el paso del tiempo (para una misma entrada f, la señal de salida es la misma hoy que mañana). Esto significa que el operador A conmuta con las translaciones, es decir, si $(Af)(x) = g(x)$, entonces $(Af)(x+s) = g(x+s)$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$. Se puede demostrar (ver [8, p.p. 225-226]) que entonces el operador A es del tipo

$$Af = \left(h\widehat{f}\right)^{\vee} \quad \text{, o lo que es equivalente,} \quad Af = H * f \tag{9.5}$$

donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y H es su transformada inversa de Fourier. La función h se denomina *función del sistema* y H se suele llamar la *respuesta impulso*. Si escribimos $h(\omega)$ en forma polar como $h(\omega) = A(\omega)\, e^{\mathbf{i}\theta(\omega)}$, entonces $A(\omega)$ y $\theta(\omega)$ representan, respectivamente, la amplitud y la fase debidos al operador A en la frecuencia ω. Los operadores del tipo (9.5) han sido y son ampliamente estudiados en matemáticas puras, especialmente a partir de los trabajos de A. Zygmund y A. Calderón quienes crearon a principios del siglo XX en la universidad de Chicago una muy fructífera escuela de matemáticos que se ocupó, entre otras cosas, del estudio de este tipo de operadores.

Pero volvamos a las señales. Supongamos que estamos interesados en conocer una señal f a partir del conocimiento de los valores de la amplitud de dicha señal en una sucesión de tiempos $t_1 < t_2 < \cdots$. *¿Es ésto posible*? Por supuesto, para una función arbitraria $f(t)$, el conocer $f(t_1), f(t_2), \cdots$ nos dice absolutamente nada sobre $f(t)$ para un $t \neq t_1, t_2, \cdots$. Sin embargo, si la señal f involucra frecuencias ω limitadas es un cierto rango, es decir, si $\omega \in [-L, L]$, para un cierto $L > 0$, entonces sí que vamos a poder describir apropiadamente la señal f. Para ello necesitaremos hacer uso de técnicas que involucran a las series de Fourier y a la transformada de Fourier. Antes de seguir adelante, diremos que una señal f es *limitada en banda* si $\widehat{f}(\omega) = 0$ para $\omega \notin [-L, L]$. Si $f \in L^2$ y es limitada en banda, entonces $\widehat{f} \in L^2$ (teorema de Plancharel) y además $\widehat{f}(\omega) = 0$ para $\omega \notin [-L, L]$. Por tanto, $\widehat{f} \in L^1$ y vale el Teorema de Inversión de Fourier.

Recordemos también que dada una función $2L-$periódica f, su serie de Fourier asociada se escribe en la forma
$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{L}+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{9.6}$$
Usando las identidades trigonométricas
$$\cos\frac{n\pi x}{L}=\frac{e^{\mathbf{i}\frac{n\pi x}{L}}+e^{-\mathbf{i}\frac{n\pi x}{L}}}{2} \quad , \quad \sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{e^{\mathbf{i}\frac{n\pi x}{L}}-e^{-\mathbf{i}\frac{n\pi x}{L}}}{2i},$$
la expresión (9.6) se transforma en
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\mathbf{i}n\pi x/L}, \tag{9.7}$$
donde
$$c_0=\frac{A_0}{2} \quad , \quad c_n=\frac{A_n-\mathbf{i}B_n}{2} \quad \text{y} \quad c_{-n}=\frac{A_n+\mathbf{i}B_n}{2}.$$
Con todo esto en mente ya estamos en condiciones de enunciar y probar uno de los resultados más importantes en Teoría de la Señal, el Teorema del Muestreo de Shannon.

Teorema 9.3.1 (del muestreo de Shannon) *Supongamos que f es continua a trozos, $f\in L^2(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ y que $\widehat{f}(\omega)=0$ para $\omega\notin[-L,L]$. Entonces*
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\sin(Lt-n\pi)}{Lt-n\pi},$$
es decir, f está completamente determinada por los valores de f en los puntos $\frac{n\pi}{L}$.

La demostración es muy formativa pues hace intervenir algunos de los resultados más importantes del Análisis de Fourier. La esbozamos a continuación.

Como $\widehat{f}\in L^2$, podemos calcular la serie de Fourier asociada a $\widehat{f}$, la cual en su forma compleja viene dada por
$$\widehat{f}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{-n}e^{-\mathbf{i}n\pi\omega/L} \quad (|\omega|\leq L) \tag{9.8}$$
donde los coeficientes de Fourier c_{-n} están dados por
$$c_{-n}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\widehat{f}(\omega)\,e^{\mathbf{i}n\pi\omega/L}\,d\omega=\frac{1}{2L}f\left(\frac{n\pi}{L}\right). \tag{9.9}$$
Nótese que la identidad (9.8) es consecuencia del teorema de convergencia puntual para series de Fourier (ya que $\widehat{f}$ es diferenciable a trozos al ser f continua a trozos, y $\widehat{f}$ es continua por el Lema de Riemann-Lebesgue) y que (9.9) es consecuencia del Teorema de Inversión de Fourier (ya que f y $\widehat{f}$ están en $L^1(\mathbb{R})$). Usando de nuevo este mismo argumento se tiene que
$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-L}^{L}\widehat{f}(\omega)\,e^{\mathbf{i}\omega t}\,d\omega\\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)e^{-\mathbf{i}n\pi\omega/L}e^{\mathbf{i}\omega t}\,d\omega\\
&= \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left.\frac{e^{\mathbf{i}(Lt-n\pi)\omega/L}}{\mathbf{i}(Lt-n\pi)/L}\right|_{-L}^{L}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\sin(Lt-n\pi)}{Lt-n\pi},
\end{aligned}$$

donde la integración término a término es consecuencia del teorema de integración para series de Fourier. ■

Como hemos mencionado anteriormente, este teorema nos dice que es posible recuperar una señal limitada en banda $f(t)$ a partir de los datos $f\left(\frac{n\pi}{L}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Además, el teorema nos da una fórmula explícita para calcular $f(t)$.

Nota 9.3.1 Existe otra versión de este teorema para señales que son limitadas en tiempo. En esta versión dual uno determina $\widehat{f}(\omega)$ a partir de los datos $\widehat{f}(n\pi/L)$. La prueba de este nuevo teorema es esencialmente la misma debido a la simetría entre tiempos y frecuencias, o lo que es lo mismo, entre f y $\widehat{f}$.

9.3.2 Ecuaciones en Derivadas Parciales

En capítulos anteriores usamos las series de Fourier para resolver ciertos problemas de EDPs en dominios acotados. En esta sección usaremos la transformada de Fourier para resolver problemas similares pero en dominios no acotados. Al igual que en el caso de la transformada de Laplace, la transformada de Fourier transforma una ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria, la cual es mucho más sencilla de resolver.

El problema de Cauchy para la ecuación del calor

Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x), & t > 0, \ -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

No imponemos condiciones de frontera porque, en realidad, no tenemos frontera. Sin embargo, para que tenga sentido calcular la tranformada de Fourier, respecto de la variable espacial x, de la función u, suponemos implícitamente que dicha función tiende a cero rápidamente cuando $x \to \pm\infty$. Si calculamos formalmente la transformada de Fourier de la EDP anterior y de su condición inicial obtenemos el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -a^2\xi^2 \widehat{u}(t,\xi), & t > 0 \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

Para cada ξ fijo, el problema anterior es un problema sencillo de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución es

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-(a\xi)^2 t}.$$

Sólo nos resta calcular la transformada inversa de Fourier de esta función para obtener la solución del problema original. Teniendo en cuenta el Ejemplo 9.1.2 y el apartado (b) de la Proposición 9.1.1, no es difícil comprobar que la transformada de Fourier inversa de $e^{-(a\xi)^2 t}$ es la función

$$K_t(x) = \frac{\sqrt{\pi/t}}{a} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

que se denomina *núcleo del calor (o también núcleo de Dirichlet)*. Por tanto,

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}(f * K_t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\, dy. \tag{9.10}$$

Usando el teorema de derivación para integrales paramétricas y suponiendo, por ejemplo, que $f \in L^1(\mathbb{R})$, se puede probar que la función dada en (9.10) es solución clásica de la ecuación del calor. Esto es debido al rápido decaimiento del núcleo de Dirichlet cuando $|x| \to \pm\infty$. De nuevo aquí nos encontramos con el efecto regularizante de la ecuación del calor. Para obtener unicidad y estabilidad de soluciones es preciso suponer, además, que f está acotada.

El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un semiplano

Consideremos ahora el problema de Dirichlet en un semiplano, es decir, se trata de encontrar una función $u = u(x, y)$, con $-\infty < x < \infty$ e $y > 0$, de clase C^2 y que satisfaga la EDP y la condición de frontera

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & -\infty < x < \infty,\ y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{9.11}$$

Para obtener unicidad de soluciones es preciso suponer alguna condición de acotación sobre u. El motivo es sencillo: si $u(x, y)$ es solución del problema anterior, entonces la función $u(x, y) + y$ también es solución de dicho problema. Supondremos, por el momento, que f es acotada e integrable y buscaremos una solución acotada del problema anterior. Al igual que en el caso de la ecuación del calor, si aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación de Laplace y a la condición de contorno obtenemos el problema

$$\begin{cases} -\xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + (\widehat{u}(\xi, y))_{yy} = 0, & y > 0 \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

La solución de este problema es

$$\widehat{u}(\xi, y) = c_1(\xi) e^{|\xi| y} + c_2(\xi) e^{-|\xi| y}$$

donde además se satisface que

$$c_1(\xi) + c_2(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

Con el fin de obtener una solución acotada ponemos $c_1 = 0$. Como la transformada inversa de $e^{-|\xi| y}$ es la función

$$P_y(x) = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

que se denomina *núcleo de Poisson*, la solución de nuestro problema original es

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}(f * P_y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(t^2 + y^2)} f(x - t)\ dt.$$

Se puede demostrar que si f es continua y acotada, entonces esta función es la única solución clásica del problema (9.11).

9.4 Ejercicios

1. Demostrar el Corolario 9.2.3.

2. Comprobar que la función $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, no está en $L^1(\mathbb{R})$, y que sin embargo P.V.$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx = 0$.

3. Demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

   Deducir de ello que la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ no está en $L^1(\mathbb{R})$.

4. Probar que si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $f \in L^2(\mathbb{R})$.

5. Demostrar que la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-|x|}$ es $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}$.

6. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y supongamos que $f(x) = 0$ para todo $|x| > L > 0$. Probar que entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Indicación: usar la desigualdad de Cauchy-Schwartz para espacios de Hilbert.*

7. Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

   Comprueba que $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \notin L^2(\mathbb{R})$ y que $g \notin L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$.

8. Usar la transformada de Fourier para resolver el siguiente problema de EDPs para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t(t,x) = 4u_{xx}(t,x), & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases} \end{cases}$$

9. Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\varepsilon} & \text{si} \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \varepsilon \end{cases}$$

   Demostrar que para cada $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f_\varepsilon}(\xi)$ converge a 1 cuando $\varepsilon \to 0$. Por ello se suele decir que *la transformada de Fourier de la delta de Dirac es* 1. Sin embargo, esto contradice la conclusión del Lema de Riemann-Lebesgue que afirma que la transformada de Fourier de cualquier función de L^1 se anula en infinito. El motivo de ésto es que la delta de Dirac no es una función de L^1.

10. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = f(x) \quad ; \quad u_t(0,x) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

   Suponiendo que todas las transformadas de Fourier existen, demuestra que

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos(ct\xi) + \widehat{g}(\xi)(c\xi)^{-1}\sin(ct\xi).$$

   Usando las propiedades de la transformada de Fourier, deduce la fórmula de d'Alembert para la ecuación de ondas, esto es,

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y) \, dy\right]$$

11. **La transformada discreta de Fourier**. En este ejercicio estudiaremos el problema de la aproximación numérica de la transformada de Fourier. El objetivo es aproximar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\xi x} f(x)\ dx$$

por algo que involucre únicamente un número finito de operaciones algebraicas efectuadas sobre un conjunto finito de datos.

En primer lugar, sustituiremos el intervalo infinito $]-\infty,\infty[$ por un intervalo finito $[a, a+L]$. Podemos suponer que $a = 0$. ¿Por qué?

En segundo lugar, intentaremos calcular $\widehat{f}(\xi)$, no en todo $\xi \in \mathbb{R}$, sino en una sucesión de puntos contenida en algún intervalo $[-C, C]$. La elección de C puede ser determinada aproximadamente si conocemos la velocidad a la que $\widehat{f}$ se anula cuando $\xi \to \infty$. Pero, ¿qué sucesión elegimos? Es suficiente tomar la sucesión $\xi_m = 2\pi m/L$, $m \in \mathbb{N}$. ¿Por qué? Por tanto, hemos de calcular

$$\widehat{f}\left(\frac{2\pi m}{L}\right) = \int_0^L e^{-2\pi \mathbf{i} m x/L} f(x)\ dx, \quad |m| \le \frac{CL}{2\pi}.$$

Finalmente, reemplazamos la integral que aparece en la expresión anterior por una suma parcial de Riemann que obtenemos dividiendo el intervalo $[0, L]$ en N subintervalos obtenidos a partir de los puntos nL/N $(n = 0, \cdots, N)$. De esta forma tenemos:

$$\widehat{f}\left(\frac{2\pi m}{L}\right) \approx \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi \mathbf{i} mn/N} f\left(\frac{nL}{N}\right)\frac{L}{N}.$$

Para que esta aproximación sea aceptablemente buena es preciso tomar $N >> CL/(2\pi)$.

En resumen: si denotamos por $a_n = f\left(\frac{nL}{N}\right)$, entonces

$$\widehat{f}\left(\frac{2\pi m}{L}\right) \approx \frac{L}{N}\widehat{a}_m,$$

donde

$$\widehat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi \mathbf{i} mn/N} a_n.$$

Nótese que $\widehat{a}_{m+N} = \widehat{a}_m$. ¿Por qué? Por tanto, toda la información está contenida en la sucesión finita $\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \cdots, \widehat{a}_{N-1}$. De esta forma hemos generado una aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}_N: & \mathbb{C}^N & \to & \mathbb{C}^N \\ & \mathbf{a} & \mapsto & \mathcal{F}_N\mathbf{a} = \widehat{\mathbf{a}} = (\widehat{a}_0, \cdots, \widehat{a}_m) \end{array}$$

donde

$$\mathbf{a} = (a_0, \cdots, a_{N-1}) \quad , \quad \widehat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi \mathbf{i} mn/N} a_n \quad (0 \le m < N).$$

Esta aplicación se denomina *transformada discreta de Fourier* de $N-$puntos.

Nos ocuparemos a continuación de la fórmula de inversión para la transformada discreta de Fourier. Para $m = 0, \cdots, N-1$, denotemos por

$$\mathbf{e}_m = \left(1, e^{2\pi \mathbf{i} m/N}, e^{2\pi \mathbf{i} 2m/N}, \cdots, e^{2\pi \mathbf{i}(N-1)m/N}\right).$$

Probar que $\{\mathbf{e}_m\}_{m=0}^{N-1}$ es una base ortogonal de $\mathbb{C}^N$, y que $\|\mathbf{e}_m\|^2 = N$ para todo m.

Una vez probado este resultado se tiene que para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} < \mathbf{a}, \mathbf{e}_m > \mathbf{e}_m.$$

Probar que entonces las componentes del vector $\mathbf{a}$, que denotamos por a_n, están dadas por

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi \mathbf{i} mn/N} \widehat{a}_m,$$

donde $\widehat{a}_m =< \mathbf{a}, \mathbf{e}_m >$. La fórmula anterior es la fórmula de inversión para la transformada discreta de Fourier.

9.5 Objetivos

- Estudiar las propiedades básicas de la transformada de Fourier.
- Mostrar la aplicación de la transformada de Fourier en la resolución de EDPs y en problemas relacionados con la Teoría de la Señal.

9.6 Comentarios sobre la Bibliografía

En la exposición de este tema hemos seguido básicamente el libro de Folland [8, Ch. 7]. Una presentación también muy directa y asequible al nivel del alumno medio es la dada en [19, Ch. 3] donde se trabaja en todo momento con funciones continuas a trozos y con la integral de Riemann. Es, por tanto, una excelente referencia.

Como se ha mencionado a lo largo del capítulo, la transformada de Fourier hace un uso continuo de las propiedades de la integral de Lebesgue. Por ello, en la exposición del tema no hemos justificado adecuadamente algunos cálculos. El alumno que desee conocer todos estos matices matemáticos ha de acudir necesariamente a libros más especializados como por ejemplo [1, 10, 17]. El libro de Gasquet-Witomski está especialmente enfocado a la aplicación de la transformada de Fourier a la Teoría de la Señal y, aunque el nivel matemático es bastante elevado, puede ser interesante para conectar los aspectos teóricos de la transformada de Fourier con algunas de sus aplicaciones.