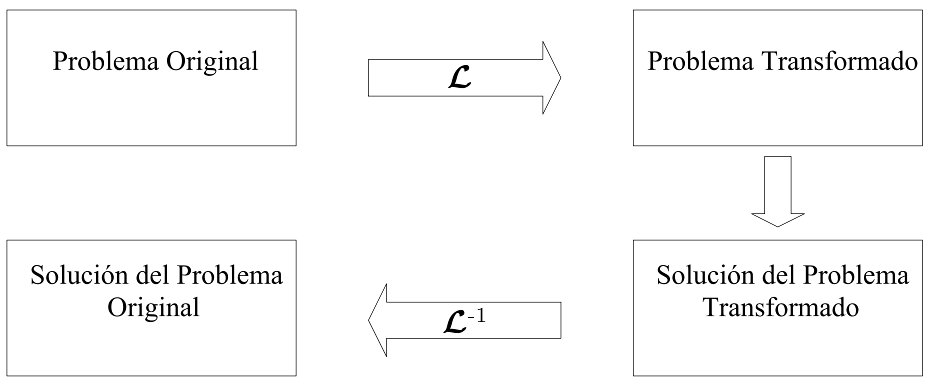
Capítulo 8

La Transformada de Laplace

En este capítulo nos ocuparemos de una de las herramientas más utilizadas en ingeniería para resolver problemas procedentes de campos tan distintos como pueden ser la Teoría de Circuitos, la Elasticidad Lineal, la Transmisión de Calor o la Propagación de Ondas. Nos referimos a la Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$) la cual fue introducida por el matemático francés Pierre Simon Laplace en 1782. La idea básica del uso de las transformadas integrales, no sólo de Laplace sino de otras transformadas como la de Fourier, la de Hilbert, la de Hankel, la de Mellín o la transformada Zeta consiste en lo siguiente: supongamos que estamos estudiando un determinado fenómeno físico que describimos por medio de un modelo matemático. Dicho modelo estará formado por una o varias ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales) con sus correspondientes condiciones iniciales y/o de contorno. El problema consiste en resolver dicho modelo matemático, es decir, resolver una ecuación diferencial. Es ahora cuando intervienen las transformadas integrales, en particular la transformada de Laplace, para transformar dicha ecuación diferencial en otra ecuación (algebraica o también diferencial), la cual va a resultar más fácil de resolver que la ecuación diferencial de partida. De esta forma *transformamos* nuestro problema original complicado en un problema más sencillo. Resolvemos el problema transformado y luego calculamos la transformada inversa de la solución del problema transformado con la esperanza, claro está, de que esta solución inversamente transformada sea la solución de nuestro problema original. En bastantes casos, esta esperanza se convierte en realidad y conseguimos, por este procedimiento, resolver nuestro problema original. Esquemáticamente, lo que estamos diciendo se puede resumir en algo así como:



La transformada de Laplace asocia a una función de variable real f, definida en el intervalo $[0, +\infty[$ una nueva función de variable compleja $\mathcal{L}(f)$, definida en un cierto subconjunto del plano complejo. Entre sus muchas virtudes, la transformada de Laplace transforma derivadas en polinomios, y por tanto, ecuaciones diferenciales ordinarias en ecuaciones algebraicas. Otra de sus virtudes es su carácter inyectivo. Esto es importante por lo siguiente: imaginemos que nuestro problema original tuviese dos soluciones (una de las cuales posiblemente es inadmisible por razones físicas, pero sí que es una solución matemática) y que sin embargo el problema transformado tuviese una sola solución. Puestos a pensar mal, al calcular la transformada inversa podríamos calcular justo la solución que es inadmisible físicamente. Este galimatías no es posible gracias a que la transformada de Laplace es, como dicen los ingleses, one-to-one, es decir, inyectiva. Es precisamente ésto lo que nos dice el Teorema de Lerch. Habitualmente, el mayor problema en todo el proceso de la transformada de Laplace es calcular la transformada inversa. No obstante, se han desarrollado varios métodos (la mayoría de ellos basados en técnicas de variable compleja y especialmente en el Teorema de los Residuos) para calcular las transformadas inversas de Laplace de las funciones que aparecen más frecuentemente en las aplicaciones. Por ello disponemos de grandes tablas de transformadas de Laplace.

El objetivo esencial de este capítulo es presentar con rigor y precisión matemáticos la transformada de Laplace y mostrar las ideas que sustentan esta teoría. Somos conscientes de que la transformada de Laplace se convertirá en un método que se aplicará de manera sistemática en otras asignaturas de esta titulación. Por eso mismo es preciso mostrar, en algún momento dado (y sin duda esta asignatura es el momento adecuado), qué es lo que se puede y lo que no se puede hacer con esta transformada. Finalmente también mostraremos algunos ejemplos concretos de ingeniería que se pueden resolver con la transformada de Laplace.

8.1 Definición y Propiedades Básicas

En esta sección definiremos la transformada de Laplace y estudiaremos algunas de sus propiedades más importantes. En particular, estudiaremos el comportamiento de esta transformada frente a las operaciones de derivación, integración y convolución.

Definición 8.1.1 *Dada $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, se define formalmente la transformada de Laplace de f como la función de variable compleja*

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\ dt,$$

donde la integral anterior se entiende en el sentido de Riemann impropio, es decir,

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\ dt = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-zt} f(t)\ dt.$$

El dominio de la función $\mathcal{L}(f)$ es el conjunto de números complejos z para los que la integral anterior es convergente. Dicho conjunto se denomina dominio de la transformada de Laplace y lo denotaremos por $D(\mathcal{L}(f))$. Evidentemente, se dice que f es transformable Laplace si $D(\mathcal{L}(f)) \neq \emptyset$.

Calcularemos ahora la transformada de Laplace de algunas funciones concretas.

Ejemplo 8.1.1 *Sean $0 \leq a < b$ y $\mathcal{X}_{[a,b]}$ la función característica del intervalo $[a, b]$, esto es,*

$$\mathcal{X}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in [a, b] \\ 0 & si \quad t \notin [a, b] \end{cases}$$

Esta función aparece frecuentemente en Teoría de Sistemas y se suele llamar también función escalón (step function, en inglés). Para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *se tiene que*

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{X}_{[a,b]}\right)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\mathcal{X}_{[a,b]}(t)\ dt = \int_a^b e^{-zt}\ dt = \frac{e^{-za} - e^{-zb}}{z}.$$

Si $z = 0$, *entonces es inmediato comprobar que* $\mathcal{L}\left(\mathcal{X}_{[a,b]}\right)(0) = b - a$. *En resumen*

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{X}_{[a,b]}\right)(z) = \begin{cases} \frac{e^{-za}-e^{-zb}}{z} & si \quad z \neq 0 \\ b - a & si \quad z = 0 \end{cases}.$$

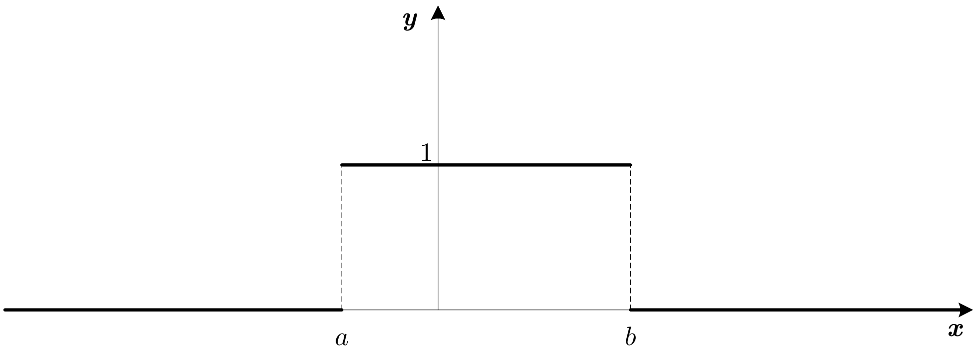


Figura 8.1: Gráfica de la función característica del intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 8.1.2 *Consideremos ahora la función exponencial* $f(t) = e^{\omega t}$, *con* $\omega \in \mathbb{C}$. *Se tiene que*

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}e^{\omega t}\ dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{(\omega-z)t}\ dt = \lim_{a\to\infty}\frac{e^{(\omega-z)a} - 1}{\omega - z}.$$

Dado que $e^{(\omega-z)a} = e^{a\,\mathrm{Re}(\omega-z)}(\cos(a\,\mathrm{Im}(\omega-z)) + \mathbf{i}\sin(a\,\mathrm{Im}(\omega-z)))$, *se tienen las siguientes posibilidades:*

- *Si* $\mathrm{Re}(\omega - z) < 0$, *entonces* $e^{a\,\mathrm{Re}(\omega-z)} \to 0$ *cuando* $a \to +\infty$ *y por tanto,*

$$\lim_{a\to+\infty} e^{(\omega-z)a} = 0.$$

- *Si* $\mathrm{Re}(\omega - z) > 0$, *entonces* $e^{a\,\mathrm{Re}(\omega-z)} \to +\infty$ *cuando* $a \to +\infty$ *y por tanto,*

$$\lim_{a\to+\infty} e^{(\omega-z)a} = \infty.$$

- *Si* $\mathrm{Re}(\omega - z) = 0$, *entonces se puede probar que no existe el límite de* $e^{a\,\mathrm{Re}(\omega-z)}$ *cuando* $a \to +\infty$ *si* $\mathrm{Im}(\omega - z) \neq 0$. *En otro caso, es decir, cuando* $z = \omega$, *entonces es evidente que no es posible calcular el valor de la transformada de Laplace en dicho punto.*

En resumen, $D(\mathcal{L}(f)) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,\omega\}$ *y*

$$\mathcal{L}\left(e^{\omega t}\right)(z) = \frac{1}{z - \omega} \quad , \ z \in D(\mathcal{L}(f)).$$

Antes de proseguir adelante con el estudio de la transformada de Laplace, la primera de las cuestiones de las que nos hemos de ocupar es averiguar qué funciones tienen transformada de Laplace, es decir, hemos de dar un criterio sencillo de comprobar que nos permita saber si una determinada función tiene transformada de Laplace o si no la tiene. Para este fin daremos, en primer lugar, la siguiente definición.

Definición 8.1.2 *Sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Se dice que la función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ tiene crecimiento exponencial de orden γ en infinito si existe una constante $M > 0$ de modo que*

$$\left| e^{-\gamma t} f(t) \right| \leq M \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Denotaremos por $\mathcal{E}_\gamma$ al conjunto de las funciones $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ que son continuas a trozos y con crecimiento exponencial de orden γ en infinito. Por continua a trozos entenderemos que en cada intervalo compacto $[0, b]$, con $b > 0$, f es continua salvo a lo sumo en un número finito de puntos, y además las discontinuidades en dichos puntos son de salto finito.

El resultado que sigue nos proporciona un criterio sencillo de comprobar y que nos permite averiguar qué funciones son transformables Laplace.

Teorema 8.1.1 *Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. Entonces existe la transformada de Laplace de f y ésta está definida en el conjunto*

$$D_\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \gamma \}.$$

Enunciamos a continuación algunas propiedades elementales de la transformada de Laplace.

Proposición 8.1.1

(a) ***Linealidad.*** *Sean $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ dos funciones de modo que los dominios de su transformada de Laplace, que denotamos por $D(\mathcal{L}(f))$ y $D(\mathcal{L}(g))$, sean no vacíos. Para cualesquiera par de números $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, existe la transformada de Laplace de la función $\alpha f + \beta g$, con dominio $D(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)) = D(\mathcal{L}(f)) \cap D(\mathcal{L}(g))$. Además,*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha \mathcal{L}(f)(z) + \beta \mathcal{L}(g)(z) \quad , \ z \in D(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)).$$

(b) ***Translación.*** *Sean $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ y $a > 0$. Se define la transladada de f como*

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \ \ 0 < t \leq a \\ f(t-a) & \textit{si} \ \ t > a \end{cases}$$

Supongamos que f es transformable Laplace y denotemos por $D(\mathcal{L}(f))$ el dominio de su transformada. Entonces la función f_a es también transformable Laplace y

$$\mathcal{L}(f_a)(z) = e^{-az} \mathcal{L}(f)(z) \quad , \ z \in D(\mathcal{L}(f)).$$

(c) ***Cambio de escala.*** *Sean $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ y $\alpha > 0$. Consideremos la función $g(t) = f(\alpha t)$, $t > 0$. Supongamos que f es transformable Laplace y denotemos por $D(\mathcal{L}(f))$ el dominio de su transformada. Entonces la función g es también transformable Laplace, el dominio de su transformada es $D(\mathcal{L}(g)) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z}{\alpha} \in D(\mathcal{L}(f)) \right\}$ y*

$$\mathcal{L}(g)(z) = \alpha^{-1} \mathcal{L}(f) \left(\frac{z}{\alpha} \right) \quad , \ z \in D(\mathcal{L}(g)).$$

8.1.1 La Transformada de Laplace y la Derivación

Uno de los principales motivos por los que la transformada de Laplace es ampliamente usada en ingeniería es porque constituye una herramienta fácil de usar y que permite resolver ciertas ecuaciones diferenciales. A continuación estudiaremos el comportamiento de esta transformada frente a las derivadas.

Por simplicidad, supongamos que $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ es de clase C^1 y que tanto f como f' tienen un crecimiento exponencial de orden γ en infinito. Para $z \in D_\gamma$, si aplicamos la definición de transformada de Laplace e integramos por partes se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(z) &= \int_0^\infty e^{-tz} f'(t)\ dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-bz} f(b) - f(0) + z\int_0^b e^{-tz} f(t)\ dt\right] \\ &= -f(0) + z\mathcal{L}(f)(z),\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $f \in \mathcal{E}_\gamma$. La fórmula anterior también vale con sólo pedir que $f, f' \in \mathcal{E}_\gamma$. En general, si f es derivable hasta orden n en $]0, +\infty[$ y si $f^{(k)} \in \mathcal{E}_\gamma$ para todo $0 \le k \le n$, entonces, para $z \in \bigcap_{k=0}^{n} D\left(\mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)\right)$ se tiene que

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0_+),$$

donde $f^{(k)}(0_+) = \lim_{t\to 0^+} f^{(k)}(t)$.

8.1.2 La Transformada de Laplace y la Integración

Estudiaremos a continuación el comportamiento de la transformada de Laplace respecto de la integración. Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una función continua a trozos y de crecimiento exponencial de orden γ en infinito. Obviamente, la función

$$F(t) = \int_0^t f(s)\ ds$$

está bien definida en $[0, +\infty[$. Si calculamos su transformada de Laplace,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F)(z) &= \int_0^\infty e^{-tz} F(t)\ dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-tz}\left(\int_0^t f(s)\ ds\right) dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes en esta expresión,

$$\int_0^b e^{-tz}\left(\int_0^t f(s)\ ds\right) dt = \frac{e^{-bz}}{-z}\int_0^b f(s)\ ds + \frac{1}{z}\int_0^b e^{-tz} f(t)\ dt.$$

Obviamente, $\int_0^b e^{-tz} f(t)\ dt \to \mathcal{L}(f)(z)$ cuando $b \to \infty$. Por otra parte,

$$\left|e^{-bz}F(b)\right| \le M e^{-b\,\mathrm{Re}\,z}\int_0^b e^{t\gamma}\ dt = \frac{M}{\gamma}\left(e^{b(\gamma - \mathrm{Re}\,z)} - e^{-b\,\mathrm{Re}\,z}\right) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

siempre que $\mathrm{Re}\,z > \rho = \max(0, \gamma)$. En resumen: para cada $z \in D_\rho$ existe la transformada de Laplace de F y además

$$\mathcal{L}(F)(z) = z^{-1}\mathcal{L}(f)(z).$$

8.1.3 La Transformada de Laplace y el Producto de Convolución

Finalmente, estudiaremos el comportamiento de la transformada de Laplace respecto de una de las operaciones más importantes en Análisis Funcional: el producto de convolución.

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define su producto de convolución como la función

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\ dy,$$

siempre que la integral anterior exista, lo cual sucede, por ejemplo, si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Como este capítulo está dedicado a la transformada de Laplace, las funciones que consideramos están definidas en el intervalo $[0, +\infty[$. Por tanto, a partir de ahora, cuando hablemos del producto de convolución de dos funciones definidas en $[0, +\infty[$ consideraremos que éstas están definidas en toda la recta real con valor cero en $]-\infty, 0[$.

Sean $f, g \in \mathcal{E}_\gamma$. Para $z \in D_\gamma$ se tiene que

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} (f * g)(t)\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \left(\int_0^{+\infty} f(s)\, g(t-s)\ ds \right) dt.$$

Se puede demostrar que la función $(t, s) \rightsquigarrow f(s)\, g(t-s)\, e^{-tz}$, definida en el rectángulo $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ es integrable. Por el Teorema de Fubini se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-tz} \left(\int_0^{+\infty} f(s)\, g(t-s)\ ds \right) dt &= \int_0^{+\infty} f(s) \left(\int_0^{+\infty} e^{-tz} g(t-s)\ dt \right) ds \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(s+\tau)z} f(s)\, g(\tau)\ d\tau\ ds \\
&= \left(\int_0^{+\infty} e^{-sz} f(s)\ ds \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau z} g(\tau)\ d\tau \right),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos efectuado el cambio de variable $t - s = \tau$. En resumen, si $f, g \in \mathcal{E}_\gamma$, entonces existe la transformada de Laplace del producto $f * g$ y además

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\, \mathcal{L}(g)(z) \quad \text{para } z \in D_\gamma.$$

8.2 El Teorema de Lerch y la Transformada Inversa de Laplace

Dada una función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continua a trozos y con crecimiento exponencial de orden γ en infinito, sabemos que existe su transformada de Laplace, $\mathcal{L}(f)$, la cual está definida en el conjunto D_γ. En esta sección veremos que la función $\mathcal{L}(f)$ es holomorfa en D_γ. Esto permitirá ver la transformada de Laplace como una aplicación lineal u operador $\mathcal{L} : \mathcal{E}_\gamma \to \mathcal{H}(D_\gamma)$, donde $\mathcal{H}(D_\gamma)$ denota el conjunto de las funciones holomorfas $f : D_\gamma \to \mathbb{C}$. Veremos que, bajo ciertas hipótesis, este operador es inyectivo, lo que nos llevará a estudiar su inverso, es decir, la transformada inversa de Laplace.

Teorema 8.2.1 *Para cada $f \in \mathcal{E}_\gamma$, la función $\mathcal{L}(f)$ es holomorfa en D_γ. Además, para cada $z \in D_\gamma$ se tiene que*

$$\mathcal{L}(f)'(z) = -\mathcal{L}(tf)(z).$$

En general, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D_\gamma$,

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(z) = (-1)^n\, \mathcal{L}(t^n f)(z).$$

Como hemos anticipado anteriormente, este teorema nos permite considerar la transformada de Laplace como un operador

$$\mathcal{L} : \mathcal{E}_\gamma \to \mathcal{H}\left(D_\gamma\right).$$

Uno de los resultados más importantes en la teoría de la transformada de Laplace es el teorema de Lerch el cual establece que el operador $\mathcal{L}$ es inyectivo. Para una demostración de este teorema véase [8, p.p. 266-267].

Teorema 8.2.2 (Lerch) *Sean $f, g \in \mathcal{E}_\gamma$ y supongamos que $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$. Entonces $f(t) = g(t)$ en todo punto t donde ambas funciones son continuas.*

El Teorema de Lerch nos permite definir el operador inverso (o transformada inversa de Laplace)

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}\left(D_\gamma\right) \to \mathcal{E}_\gamma,$$

donde $\mathcal{H}_0 = \mathcal{L}\left(\mathcal{E}_\gamma\right)$ es un subconjunto de las funciones holomorfas definidas en D_γ. Este operador inverso asocia a una función de variable compleja F otra función de variable real $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, la cual está relacionada con F por medio de la identidad

$$\mathcal{L}(f) = F.$$

La función f que satisface la igualdad anterior se denomina *transformada de Laplace inversa de F*. Es importante señalar que el dominio de la transformada inversa de Laplace no es todo $\mathcal{H}\left(D_\gamma\right)$, es decir, no toda función holomorfa es la transformada de Laplace de algo (ver Ejercicio 1).

La transformada de Laplace inversa tiene un comportamiento análogo al de la transformada de Laplace respecto de las operaciones translación y convolución. De manera más concreta, sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa de modo que existe su transformada inversa de Laplace. Entonces, para $a > 0$, existe la transformada inversa de la función $z \rightsquigarrow e^{-az}F(z)$ y además,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-az}F\right)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq a \\ \mathcal{L}^{-1}(F)(t-a) & \text{si} \quad t > a \end{cases}.$$

Respecto de la convolución, sean $F, G \in \mathcal{H}\left(D_\gamma\right)$, con $\gamma \in \mathbb{R}$, de forma que existen sus transformadas inversas de Laplace $\mathcal{L}^{-1}(F)$, $\mathcal{L}^{-1}(G)$ y están en $\mathcal{E}_\gamma$. Entonces existe la transformada inversa del producto FG y además

$$\mathcal{L}^{-1}(FG)(t) = \left(\mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G)\right)(t) \quad (t \geq 0). \tag{8.1}$$

Estas propiedades se usan muy frecuentemente cuando se hacen cálculos con la transformada de Laplace y por tanto, es importante conocerlas y saberlas aplicar.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, es especialmente importante saber calcular la tranformada de Laplace inversa de ciertas funciones holomorfas. La principal herramienta para efectuar este cálculo es el Teorema de los Residuos, el cual es, además, la pieza clave en la prueba del siguiente resultado. La demostración puede encontrarse en [15, T. 6.7, p. 168].

Teorema 8.2.3 *Sea F una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ y de forma que existen constantes $M, R, \alpha > 0$ tales que*

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha} \quad , \quad |z| \geq R.$$

Entonces la función

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re}s\left(e^{tz}F(z), z_j\right) \quad , \ t \geq 0$$

es la transformada inversa de F*, es decir,* $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$*.*

Veamos ahora algún ejemplo en el que aplicaremos el teorema anterior para calcular la transformada de Laplace de alguna función racional.

Ejemplo 8.2.1 *Consideremos la función*

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)^2}.$$

Las raíces del polinomio del denominador son 1 *(de multiplicidad uno) e* $\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$ *(de multiplicidad dos). Calculamos a continuación los residuos de la función* $e^{tz}F(z)$ *en cada una de las singularidades:*

- *Residuo en* 1 :
$$\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{tz}}{(z-1)(z^2+1)^2}, \ 1\right) = \frac{e^t}{4}.$$
- *Residuo en* $\mathbf{i}$:
$$\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{tz}}{(z-1)(z^2+1)^2}, \ \mathbf{i}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-\mathbf{i})^2 e^{tz}}{(z-1)(z^2+1)^2}\right)\Bigg|_{z=\mathbf{i}} = -\frac{t(\mathbf{i}-1)+(2+\mathbf{i})}{4(\mathbf{i}-1)^2}e^{\mathbf{i}t}.$$
- *Residuo en* $-\mathbf{i}$:
$$\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{tz}}{(z-1)(z^2+1)^2}, \ -\mathbf{i}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{(z+\mathbf{i})^2 e^{tz}}{(z-1)(z^2+1)^2}\right)\Bigg|_{z=-\mathbf{i}} = \frac{t(1+\mathbf{i})-2+\mathbf{i}}{4(1+\mathbf{i})^2}e^{-\mathbf{i}t}.$$

Por tanto, aplicando el Teorema 8.2.3 se tiene que $\mathcal{L}^{-1}(F)$ *es la suma de los tres residuos anteriores.*

La tesis del resultado anterior puede ser mejorada. Esta mejora no es gratuita, es decir, en las aplicaciones es posible tener que calcular la transformada de Laplace inversa de funciones holomorfas tales como raíces cuadradas (ésto sucede, por ejemplo, con la ecuación del calor) las cuales son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Este tipo de funciones no satisfacen las hipótesis del teorema anterior. Sin embargo, si que satisfacen las hipótesis del siguiente teorema. Para una demostración véase [8, T. 8.5, p. 267].

Teorema 8.2.4 *Sea* F *una función holomorfa en el semiplano* $\operatorname{Re} z > a$ *y supongamos que existe una constante* $C > 0$ *de modo que*

$$|F(z)| \leq C(1+|z|)^{-\alpha} \quad , \alpha > \frac{1}{2} \ , \ \operatorname{Re} z > a.$$

Si para $b > a$, $r > a$ *y* $t \in \mathbb{R}$ *escribimos*

$$f_{r,b}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-ir}^{b+ir} F(z)\, e^{zt}\, dz,$$

y si para algún $b > a$, $f_{r,b}$ *converge puntualmente a la función* f *cuando* $r \to \infty$*, la cual además está en* $\mathcal{E}_\gamma$*, entonces para todo* $b > a$, $f_{r,b} \to f$ *puntualmente. Además,*

$$F = \mathcal{L}(f).$$

La principal desventaja del teorema anterior, en comparación con el Teorema 8.2.3, es que mientras aquel nos proporciona de manera directa la transformada de Laplace inversa, en este otro la transformada inversa es más difícil de calcular. Sin embargo, gracias al Teorema 8.2.4 se puede probar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}}\right)(t) = \frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2at\sqrt{\pi t}}. \tag{8.2}$$

Concluimos esta sección con una tabla de las transformadas de Laplace de algunas funciones que suelen aparecer a menudo en las aplicaciones. Una tabla más completa puede encontrarse en [8, p. 264].

Función original $f(t)$	**Transformada de Laplace** $\mathcal{L}(f)(t)$	**Dominio de** $\mathcal{L}(f)$
$\mathcal{X}_{[a,b]} \quad (0 \leq a \leq b)$	$\begin{cases} \frac{e^{-az}-e^{-bz}}{z}, & z \neq 0 \\ b-a & z = 0 \end{cases}$	$\mathbb{C}$
$\mathcal{X}_{[a,b[} \quad (0 \leq a)$	$\frac{e^{-az}}{z}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$
$t^n \quad (n \geq 0)$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$
$t^n e^{\omega t} \quad (n \geq 0\ ,\ \omega \in \mathbb{C})$	$\frac{n!}{(z-\omega)^{n+1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \omega\}$
$\sin t$	$\frac{1}{z^2+1}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$
$\cos t$	$\frac{z}{z^2+1}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$
$e^{\omega t}\sin(\alpha t) \quad (\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \omega \in \mathbb{C})$	$\frac{\alpha}{(z-\omega)^2+\alpha^2}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \omega\}$
$e^{\omega t}\cos(\alpha t) \quad (\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \omega \in \mathbb{C})$	$\frac{z-\omega}{(z-\omega)^2+\alpha^2}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \omega\}$
$t^n \sin(\alpha t) \quad (\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ n \geq 0)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{\alpha}{z^2+\alpha^2}\right)$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$
$t^n \cos(\alpha t) \quad (\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ n \geq 0)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{z^2+\alpha^2}\right)$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$

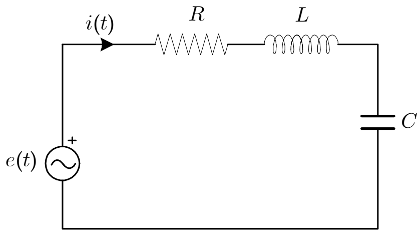
8.3 Algunas Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Como hemos mencionado en la introducción, la transformada de Laplace es una herramienta utilizada con asiduidad en diferentes campos de la ingeniería. En esta sección presentamos algunos problemas concretos de interés en Teoría de Circuitos y en EDPs.

8.3.1 Teoría de Circuitos

La transformada de Laplace proporciona un método muy eficiente para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Dichas ecuaciones aparecen con mucha frecuencia en Teoría de Circuitos y, en general, en Teoría de Sistemas. Por supuesto, hay otros métodos para resolver estas mismas ecuaciones. Sin embargo, por su popularidad entre los ingenieros, mostramos a continuación un sencillo ejemplo de aplicación de esta técnica. En lo que sigue intentaremos usar la notación propia de la Teoría de Circuitos.

Supongamos que tenemos un circuito RLC tal y como se muestra en la siguiente figura.



Partiendo de las leyes de Kirchhoff se obtiene el modelo matemático para este circuito el cual está dado por medio de la ecuación diferencial ordinaria

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t) \tag{8.3}$$

donde L representa la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia, $q = q(t)$ es la carga, y finalmente $e = e(t)$ es la entrada del circuito, es decir, la fuerza electromotriz que impulsa una carga eléctrica y produce la corriente $i = \frac{dq}{dt}$. En Teoría de Circuitos la ecuación (8.3) se expresa en términos de la incógnita i, esto es, en términos de la intensidad de corriente. Teniendo en cuenta que si $q(0) = 0$, entonces $q(t) = \int_0^t i(t)\ dt$, la ecuación (8.3) se reescribe como

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\ dt' = e(t) \tag{8.4}$$

En nuestro modelo, L, R y C son constantes. Se suele conocer además el estado inicial del sistema, es decir, se suele dar una condición inicial que nos permite obtener unicidad de solución. Si en $t = 0$ se cierra el circuito, entonces $i(0) = 0$.

En Teoría General de Sistemas (ya sean éstos eléctricos, mecánicos, etc) suele ser de gran interés averiguar la *respuesta* del sistema (en el caso eléctrico la respuesta es la incógnita $i(t)$) ante lo que se llama un *impulso*, y que en matemáticas es lo que llamamos una *delta de Dirac* y representamos por δ. El interés no es otro sino que si se conoce la respuesta del sistema ante el impulso (denotemos por $h = h(t)$ dicha respuesta), entonces se conoce la respuesta $i = i(t)$ ante cualquier otra entrada $e = e(t)$. En efecto, $i(t)$ se expresa como la convolución de h y e, esto es,

$$i(t) = (h * e)(t).$$

En matemáticas, h es lo que llamamos la *solución fundamental* del operador integro-diferencial

$$A[i] = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\ dt'.$$

Analicemos un poco más en detalle todo este aluvión de afirmaciones. Para ello hemos de tener en cuenta que $\mathcal{L}(\delta) = 1$ (ver Ejercicio 2). En lo que sigue procederemos de un modo formal, es decir, no justificaremos matemáticamente los cálculos que hagamos. Para poder justificarlos adecuadamente (incluso el hecho de que $\mathcal{L}(\delta) = 1$) tendríamos que trabajar dentro del ámbito de la Teoría de Distribuciones de la cual hablaremos más adelante en este curso. Supongamos que $h = h(t)$ es solución del problema

$$\begin{cases} L\frac{dh}{dt}(t) + Rh(t) + \frac{1}{C}\int_0^t h(t')\ dt' = \delta(t), & t > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Tomando transformadas de Laplace y teniendo en cuenta el comportamiento de dicha transformada respecto de la derivación y la integración así como la condición inicial $h(0) = 0$, se obtiene que

$$\mathcal{L}\left(L\frac{dh}{dt} + Rh + \frac{1}{C}\int_0^t h(t')\ dt'\right)(s) = \left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)\mathcal{L}(h)(s) = \mathcal{L}(\delta) = 1,$$

es decir,

$$H(s) \equiv \mathcal{L}(h)(s) = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}},$$

que también se suele escribir como

$$H(s) = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}.$$

Nótese que estamos usando s para denotar la variable compleja que hasta ahora venimos denotando por z. La función H se suele llamar en Teoría de Sistemas *función de transferencia*. Sea ahora $i = i(t)$ solución del problema

$$\begin{cases} L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\ dt' = e(t), & t > 0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

donde $e = e(t)$ es una función que tiene transformada de Laplace. Tomando de nuevo transformadas de Laplace en este último problema obtenemos que

$$\mathcal{L}(i)(s) = \mathcal{L}(e)(s)\frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} = H(s)\mathcal{L}(e)(s).$$

Finalmente, tomando transformadas inversas,

$$i(t) = (h * e)(t).$$

Veamos ahora un ejemplo concreto de todo lo anterior.

Ejemplo 8.3.1 *Consideremos un circuito RLC donde $L = 1$, $R = 6$ y $C = 1/5$, en sus correspondientes unidades físicas. Estudiaremos la respuesta de este sistema ante lo que en Teoría de Circuitos se llama una entrada tipo escalón, esto es,*

$$e(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & si \quad t \ge 1 \end{cases}$$

Lo que buscamos es la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) + 6i(t) + 5\int_0^t i(t')\ dt' = e(t), & t > 0 \\ i(0) = 0 \end{cases} \tag{8.5}$$

Empezaremos por calcular la respuesta del circuito ante el impulso, es decir, poniendo $e(t) = \delta(t)$ en el sistema anterior. Como hemos visto anteriormente, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 5}.$$

Para calcular $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))(t)$ usaremos el Teorema 8.2.3. Dado que la función H tiene dos polos simples en los puntos $s = -1$ y $s = -5$,

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(s))(t) \\ &= \operatorname{Re}s\left(e^{ts}H(s),\ s = -1\right) + \operatorname{Re}s\left(e^{ts}H(s),\ s = -5\right) \\ &= -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^{-5t}. \end{aligned}$$

Nota 8.3.1 No confundir la función de entrada $e = e(t)$ con el número e (o con la función exponencial e^t) que es el que aparece en la expresión anterior. Nótese también que la solución del problema anterior no satisface la condición inicial $h(0) = 0$. No podemos por tanto ver a la función h como una solución clásica de nuestro problema. Esta patología es causada por el singular comportamiento de la delta de Dirac.

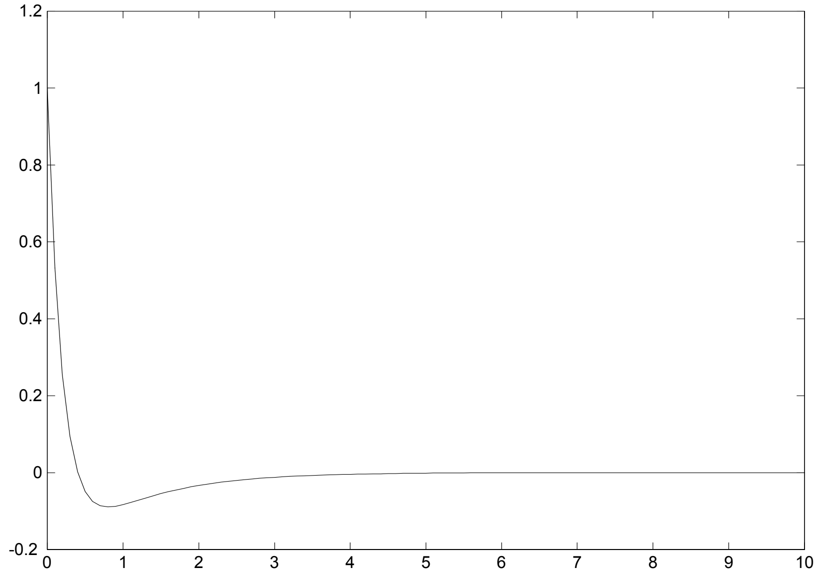


Figura 8.2: Gráfica de la función $h = h\,(t)$.

Finalmente, la solución del problema (8.5) viene dada por $i\,(t) = (h * e)\,(t)$. Para calcular esta convolución y no equivocarnos distinguiremos tres casos:

(a) Para $t < 0$ se tiene que $i\,(t) = 0$ pues tanto h como e se anulan en el intervalo $]-\infty, 0[$.

(b) Para $0 \leq t < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} i\,(t) &= (h * e)\,(t) \\ &= \int_0^t \left(-\frac{1}{4}e^{-t'} + \frac{5}{4}e^{-5t'}\right)\,dt' \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{-t} - e^{-5t}\right). \end{aligned}$$

(c) Finalmente, para $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} i\,(t) &= (h * e)\,(t) \\ &= \int_{t-1}^t \left(-\frac{1}{4}e^{-t'} + \frac{5}{4}e^{-5t'}\right)\,dt' \\ &= (1-e)\,\frac{e^{-t}}{4} + \left(e^5 - 1\right)\frac{e^{-5t}}{4} \end{aligned}$$

En resumen,

$$i\,(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{4}\left(e^{-t} - e^{-5t}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ (1-e)\,\frac{e^{-t}}{4} + \left(e^5 - 1\right)\frac{e^{-5t}}{4} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

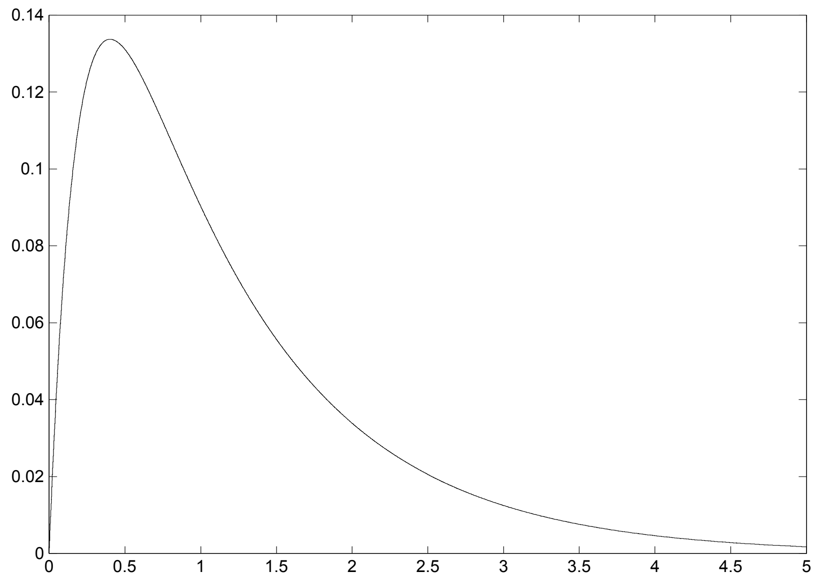


Figura 8.3: Gráfica de la función $i = i(t)$.

En Teoría de Circuitos es interesante estudiar el comportamiento de $i(t)$ cuando $t \to \infty$ pues eso nos proporciona el régimen estacionario del circuito. En el caso del ejemplo que venimos estudiando se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = 0.$$

8.3.2 Ecuaciones en Derivadas Parciales

En esta sección aplicaremos el método de la transformada de Laplace para resolver algunos problemas de ecuaciones en derivadas parciales. Fijados los parámetros $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, con $\alpha\beta \neq 0$, consideremos el siguiente problema para la llamada ecuación del telégrafo:

$$\begin{cases} u_{xx}(t,x) = \alpha u_{tt}(t,x) + \beta u_t(t,x) + \gamma u(t,x) + g(t,x) & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(t,0) = f(t) & t > 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & 0 < x < l \\ |u(t,x)| \leq M & t, x > 0 \end{cases}$$

Este problema es un modelo matemático para la transmisión de una señal electromagnética a lo largo de un cable. Las constantes α, β y γ están relacionadas con propiedades físicas del cable tales como la resistencia, inductancia, capacitancia y la conductancia. Estudiaremos este problema cuando $l < \infty$ y cuando $l = \infty$. Este último caso es un buen modelo para un cable muy largo. La condición inicial $u(t,0) = f(t)$ representa la señal que es enviada desde el extremo $x = 0$. El término no homogéneo g representa la acción del alguna fuente externa que actúa sobre el sistema.

Nótese también que la ecuación del telégrafo se reduce a la ecuación de ondas cuando $\alpha = c^{-2}$ y $\beta = \gamma = 0$, y a la ecuación del calor cuando $\alpha = \gamma = 0$ y $\beta = a^{-2}$.

Suponiendo que las funciones $u(\cdot, x)$, $f(\cdot)$ y $g(\cdot, x)$ tienen transformada de Laplace se tiene que

$$\mathcal{L}(u_{xx}) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\ dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-zt} u(t,x)\ dt = [\mathcal{L}(u)]_{xx}$$

donde en la segunda igualdad hemos de suponer que u es suficientemente regular para que sea válida dicha identidad. Por tanto, si escribimos $U = \mathcal{L}(u)$, $F = \mathcal{L}(f)$ y $G = \mathcal{L}(g)$, entonces la ecuación del telégrafo se transforma en

$$U_{xx} = \left(\alpha z^2 + \beta z + \gamma\right) U + G$$

donde hemos usado el hecho de que $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$. Disponemos además de la condición inicial $U(z,0) = F(z)$. De esta forma hemos transformado la ecuación del telégrafo en una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de orden 2. Nótese que es x la variable independiente de esta nueva ecuación y que la variable z es un parámetro. Al igual que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes reales, se puede probar que la solución general de esta ecuación es

$$U(z,x) = a_1(z) e^{x\omega} + a_2(z) e^{-x\omega} + \widetilde{G}(x,z)$$

donde $\widetilde{G}(z,x)$ es una solución particular de la ecuación completa y $\omega = \sqrt{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}$, entendiendo siempre la determinación principal de la raíz cuadrada. Como $x > 0$, para poder calcular la transformada inversa de Laplace y de esta forma poder recuperar la solución de la EDP original, la función U ha de ser holomorfa y acotada en algún semiplano $\operatorname{Re} z > a$. Esto en realidad es consecuencia de ser u acotada. Una forma de conseguir que se cumpla esta propiedad es poniendo $a_1(z) = 0$. Si imponemos finalmente la condición inicial $U(z,0) = F(z)$ obtenemos

$$U(z,x) = F(z) e^{-x\omega} + \left(1 - e^{-x\omega}\right) \widetilde{G}(z,x). \tag{8.6}$$

Finalmente, calculando la transformada inversa de Laplace de la función $U(\cdot,x)$ obtenemos la solución de nuestro problema original.

Como caso particular de la ecuación del telégrafo, consideraremos ahora un problema concreto para la ecuación de ondas y otro para la ecuación del calor.

Ejemplo 8.3.2 *Consideremos el siguiente problema para la ecuación de ondas*

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + x\sin t, & t,x > 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & x > 0 \\ u(t,0) = \sin t & t > 0 \\ |u(t,x)| \leq M & t,x > 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de la transformada de Laplace, el problema original se transforma en

$$\begin{cases} U_{xx}(z,x) = \left(\frac{z}{c}\right)^2 U(z,x) - \frac{x}{c^2(1+z^2)}, & x \geq 0 \\ U(z,0) = \frac{1}{z^2+1} \end{cases}$$

donde $U(z,x) = \mathcal{L}(u(\cdot,x))(z)$. *La solución general de esta ecuación diferencial ordinaria es*

$$U(z,x) = a_1(z) e^{xz/c} + a_2(z) e^{-xz/c} + \frac{x}{z^2(z^2+1)}$$

e imponiendo la condición inicial $U(z,0) = \frac{1}{z^2+1}$ *llegamos a que*

$$a_1(z) + a_2(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Por otra parte, la condición de acotación de las oscilaciones implica que

$$|U(z,x)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-tz} u(t,x)\ dt \right| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} z}$$

y por tanto,

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} U(z,x) = 0$$

uniformemente en $x > 0$. *Para conseguir esto ponemos* $a_1(z) = 0$ *y con ello,* $a_2(z) = \frac{1}{1+z^2}$. *En resumen, la solución del problema transformado es*

$$U(z,x) = \frac{e^{-xz/c}}{1+z^2} + \frac{x}{z^2(1+z^2)}.$$

Finalmente, para calcular la solución de problema original hemos de calcular la transformada inversa de Laplace de esta función. Usando la propiedad de tanslación de la transformada de Laplace se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-xz/c}}{1+z^2}\right)(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq x/c \\ \sin\left(t - \frac{x}{c}\right) & si \quad t > x/c \end{cases}$$

y por el Teorema 8.2.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2(1+z^2)}\right)(t) &= \operatorname{Re} s\left(\frac{e^{zt}}{z^2(1+z^2)},0\right) + \operatorname{Re} s\left(\frac{e^{zt}}{z^2(1+z^2)},\mathbf{i}\right) + \operatorname{Re} s\left(\frac{e^{zt}}{z^2(1+z^2)},-\mathbf{i}\right) \\ &= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{zt}}{(1+z^2)}\right)\bigg|_{z=0} + \frac{e^{zt}}{z^2(z+\mathbf{i})}\bigg|_{z=\mathbf{i}} + \frac{e^{zt}}{z^2(z-\mathbf{i})}\bigg|_{z=-\mathbf{i}} \\ &= t + \frac{e^{\mathbf{i}t}}{-2\mathbf{i}} + \frac{e^{-\mathbf{i}t}}{2\mathbf{i}} \\ &= t - \sin t. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de problema original es

$$u(t,x) = \begin{cases} x(t - \sin t) & si \quad t \leq x/c \\ \sin\left(t - \frac{x}{c}\right) + x(t - \sin t) & si \quad t > x/c \end{cases}.$$

Ejemplo 8.3.3 *Consideremos ahora el siguiente problema para la ecuación del calor*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) & t,x > 0 \\ u(0,x) = 0 & x > 0 \\ u(t,0) = f(t) & t > 0 \\ |u(t,x)| \leq M & t,x > 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de la transformada de Laplace se tiene que la solución del problema transformado es

$$U(z,x) = e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}} F(z)$$

donde $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$. *Finalmente, teniendo en cuenta la identidad (8.2) y el comportamiento de la transformada de Laplace respecto del producto de convolución se tiene que la solución de nuestro problema original es*

$$u(t,x) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t-s)\, s^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4a^2 s}}\, ds.$$

8.4 Ejercicios

1. Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. Demostrar que entonces

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to +\infty \\ z \in D_\gamma}} \mathcal{L}(f)(z) = 0.$$

Deducir de ello que el operador $\mathcal{L} : \mathcal{E}_\gamma \to \mathcal{H}(D_\gamma)$ no es sobreyectivo.

2. Dado $\varepsilon > 0$ se define la función

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , \quad 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & , \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

Comprobar que f_ε converge puntualmente cuando $\varepsilon \to 0$ a la "función"

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & , \quad t = 0 \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

llamada *delta de Dirac.* Comprueba que también se verifica que

$$\mathcal{L}(f_\varepsilon)(z) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}, \text{ con } \operatorname{Re} z > 0.$$

Esto permite definir *formalmente* la transformada de Laplace de la delta de Dirac como la función constante igual a 1. Nótese que, por el Ejercicio 1, la transformada de Laplace de cualquier función de $\mathcal{E}_\gamma$ ha de anularse cuando $\operatorname{Re} z \to \infty$. Hemos de concluir por tanto que la delta de Dirac no es una función de $\mathcal{E}_\gamma$.

3. Fijados $t_0 > 0$ y $0 < \varepsilon < t_0$, consideremos la función $f_{t_0,\varepsilon}$ definida como

$$\begin{array}{rccl} f_{t_0,\varepsilon} : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \rightsquigarrow & f_{t_0,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } t \in \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{array}$$

Se pide:

(a) Comprueba que $f_{t_0,\varepsilon}$ converge puntualmente cuando $\varepsilon \to 0$ a la delta de Dirac centrada en t_0, es decir,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_{t_0,\varepsilon}(t) = \delta_{t_0}(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(b) Calcula la transformada de Laplace de la función $f_{t_0,\varepsilon}$, que denotaremos por $\mathcal{L}(f_{t_0,\varepsilon})$, y comprueba que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}(f_{t_0,\varepsilon})(s) = e^{-t_0 s} \quad \text{para cada } s > 0.$$

Por ello se suele decir que la transformada de Laplace de la delta de Dirac centrada en t_0 es igual a $e^{-t_0 s}$, con $s > 0$, esto es,

$$\mathcal{L}(\delta_{t_0})(s) = e^{-t_0 s} \quad \text{para cada } s > 0.$$

(c) Utiliza los resultados de los apartados anteriores para resolver el siguiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} i''(t) + 2i(t) = \delta_\pi(t), & t > 0 \\ i(0) = i'(0) = 0. \end{cases}$$

Estudia si la función $i(\cdot)$, solución del problema anterior, es de clase $C^2(]0,+\infty[)$.

4. Calcula la función de transferencia de un circuito RLC donde $L = 1$, $R = 2$, $C = 1/2$, en sus correspondientes unidades físicas. Calcula también la intensidad de corriente $i = i(t)$ que circula por dicho circuito si la fuerza electromotriz que genera la corriente es de la forma $e(t) = \sin \omega t$.

5. Hemos visto en este capítulo que la transformada de Laplace es una potente herramienta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Sin embargo, si intentamos aplicar el método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones con coeficientes no constantes nos podemos llevar alguna sorpresa desagradable. El motivo esencial es que al aplicar el método de la transformada de Laplace para resolver una EDO, estamos asumiendo que la solución del problema así como sus derivadas son transformables Laplace, lo cual, en general no va a ser cierto cuando consideremos ecuaciones con coeficientes no constantes. Por ejemplo, consideremos la ecuación de Bessel

$$tu''(t) + u'(t) + tu(t) = 0.$$

Aplica el método de la transformada de Laplace para resolver esta ecuación. Observarás que este método nos dice que la solución general de esta ecuación es cJ_0, es decir, la función de Bessel de primera especie. Sin embargo, la segunda solución linealmente independiente de esta ecuación, a saber, la función de Bessel de segunda especie Y_0 *no es detectada por la transformada de Laplace.* El motivo de todo esto es que las derivadas primera y segunda de la función Y_0 no son transformables Laplace.

6. Resuelve, usando la transformada de Laplace, los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(a) \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y \\ x(0) = 1; \; y(0) = 0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x' = -x - 2y + 1 \\ y' = x - 2y \\ x(0) = 0; \; y(0) = -1 \end{cases}$$

7. Consideremos un fluido que se mueve a una velocidad constante $c > 0$ a lo largo de un conducto horizontal de sección constante. Supongamos que existe una sustancia en suspensión que se propaga a lo largo del fluido. Si suponemos que la difusión es despreciable, la función $u(t,x)$, que nos mide la concentración de dicha sustancia en el instante t y en la posición x, satisface la EDP

$$u_t(t,x) + cu_x(t,x) = 0 \quad (t, x > 0)$$

que se denomina *ecuación lineal del transporte.* Si suponemos que la sustancia en suspensión se va añadiendo al fluido de manera constante obtenemos la condición de contorno $u(t,0) = a = cte$. Supongamos también que en el instante inicial la cantidad de sustancia en suspensión es cero, es decir, $u(0,x) = 0$. Por tanto, el modelo matemático para este problema es

$$\begin{cases} u_t(t,x) + cu_x(t,x) = 0 & t,x > 0 \\ u(0,x) = 0 & x > 0 \\ u(t,0) = a & t > 0 \end{cases}$$

Resuelve este problema usando el método de la transformada de Laplace.

8. Utiliza la transformada de Laplace para resolver el siguiente problema para la ecuación del transporte con coeficientes no constantes:

$$\begin{cases} u_t + (1+x)u_x + u = 0, \quad t,x > 0 \\ u(0,x) = 0, \quad x > 0 \\ u(t,0) = f(t) = \begin{cases} t & t < a \\ a & t \geq a \end{cases} \end{cases}$$

siendo $a > 0$ una constante.