Capítulo 5

Problemas Regulares de Sturm-Liouville

Como hemos visto en el capítulo dedicado a los espacios de Hilbert, el método de separación de variables aplicado a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden nos conduce al estudio de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$a_0(x)\,u''(x) + a_1(x)\,u'(x) + a_2(x)\,u(x) = \lambda u(x)\,, \quad a < x < b, \tag{5.1}$$

donde $a_0, a_1, a_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Suponiendo $a_0(x) < 0$ y llamando

$$p(x) = e^{\int_a^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt} \quad , \; q(x) = -p(x)\frac{a_2(x)}{a_0(x)} \quad \text{y } s(x) = -\frac{p(x)}{a_0(x)}$$

la ecuación (5.1) se transforma en

$$-\left(pu'\right)' + qu = \lambda su \tag{5.2}$$

donde $p \in C^1([a,b])$ y $q, s \in C([a,b])$. Además, $p(x) > 0$ y $s(x) > 0 \; \forall x \in [a,b]$.

En este capítulo estudiaremos en detalle las ecuaciones del tipo (5.2) las cuales aparecen acompañadas de ciertas condiciones de contorno.

5.1 Definiciones y Propiedades Básicas

Definición 5.1.1 *Dado un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y funciones reales $p \in C^1([a,b])$ y $q \in C([a,b])$ verificando que $p(x) > 0 \; \forall x \in [a,b]$, se llama operador de Sturm-Liouville al operador diferencial*

$$\begin{array}{rccc} L: & C^2([a,b];\mathbb{C}) & \to & C([a,b];\mathbb{C}) \\ & u & \rightsquigarrow & -(pu')' + qu \end{array}$$

Proposición 5.1.1 (Identidad de Lagrange) *Para cada par de funciones $u, v \in C^2([a,b])$ se tiene que*

$$< Lu, v > = < u, Lv > + p(b)\left[u(b)\,\overline{v'}(b) - u'(b)\,\overline{v}(b)\right] + p(a)\left[u'(a)\,\overline{v}(a) - u(a)\,\overline{v'}(a)\right]$$

donde $<,>$ denota el producto interior en $L^2([a,b];\mathbb{C})$.

La demostración se obtiene con solo aplicar la fórmula de integración por partes dos veces a la integral
$$\int_a^b -\left(pu'\right)'\overline{v}.$$
■

Respecto de las condiciones de contorno que suelen aparecer junto a la ecuación diferencial (5.2), las más habituales son las que anulan los dos últimos sumandos de la identidad de Lagrange. Dentro de este tipo de condiciones se encuentran las siguientes:

Definición 5.1.2 *A unas condiciones de contorno del tipo*

$$(Su)\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \\ \gamma_2 u(b) + \delta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

con $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$ *y* $\gamma_2^2 + \delta_2^2 > 0$ *se les llama condiciones separadas. Ejemplos de condiciones separadas son:*

- *Condiciones de Dirichlet o de extremos fijos:*

$$\begin{cases} u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases}$$

- *Condiciones de Neumann o de extremos libres:*

$$\begin{cases} u'(a) = 0 \\ u'(b) = 0 \end{cases}$$

- *Condiciones de Nicoletti:*

$$\begin{cases} u'(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} u(a) = 0 \\ u'(b) = 0 \end{cases}$$

Definición 5.1.3 *A unas condiciones de contorno del tipo*

$$(Pu)\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \gamma_1 u(b) = 0 \\ \beta_2 u'(a) + \delta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

con $\alpha_1\gamma_1 \neq 0$, $\beta_2\delta_2 \neq 0$ *y* $p(b)\,\alpha_1\beta_2 = p(a)\,\gamma_1\delta_2$, *se les llama condiciones periódicas. Un caso particular de condiciones periódicas (en el caso de que* p *sea la función* 1*) que suele aparecer en la práctica es:*

$$\begin{cases} u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b) \end{cases}$$

Tanto las condiciones separadas como las periódicas son autoadjuntas para el operador de Sturm-Liouville, es decir,
$$< Lu, v >=< u, Lv >$$
para cada $u, v \in D_0 = \left\{u \in C^2([a,b]) : B_1(u) = B_2(u) = 0\right\}$, donde $B_1(u) = B_2(u) = 0$ denota tanto las condiciones separadas (Su) como las periódicas (Pu).

Finalmente introduciremos un nuevo espacio de Hilbert que utilizaremos más adelante.

Definición 5.1.4 *Dada una función $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) > 0$ c.t.p., definimos el espacio*

$$L_s^2([a,b];\mathbb{C}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : \sqrt{s} f \in L^2 \right\}$$

dotado con el producto interior

$$< f, g >_s = < \sqrt{s} f, \sqrt{s} g >_{L^2} = \int_a^b s f \overline{g}.$$

El espacio $\left(L_s^2([a,b];\mathbb{C}), <,>_s\right)$ es un espacio de Hilbert.

5.2 Sistemas Regulares de Sturm-Liouville

Definición 5.2.1 *Llamaremos sistema regular de Sturm-Liouville sobre un intervalo $[a,b]$ a un sistema formado por:*

(a) *Un operador de Sturm-Liouville $Lu = -(pu')' + qu$.*

(b) *Un conjunto de condiciones de contorno $B_1(u)$ y $B_2(u)$, autoadjuntas para el operador L.*

(c) *Una función continua $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$.*

El objetivo es encontrar todas las soluciones clásicas del problema de contorno

$$(S-L) \quad \left\{ \begin{array}{l} Lu = \lambda s u \\ B_1(u) = 0 \\ B_2(u) = 0 \end{array} \right.$$

donde λ es un número complejo cualquiera.

Definición 5.2.2 *Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio (o autovalor) del sistema de Sturm-Liouville $(S-L)$ si existe una solución no nula del sistema $(S-L)$. A cada una de estas soluciones no nulas se les llama función propia (o autofunción) asociada al valor propio λ. Se llama espacio propio al subespacio vectorial de $C^2([a,b])$ formado por todas las funciones propias asociadas a un mismo valor propio.*

En el siguiente teorema recogemos las propiedades fundamentales de los valores propios y las funciones propias asociadas a un sistema regular de Sturm-Liouville.

Proposición 5.2.1

(i) *Los valores propios de un sistema regular de Sturm-Liouville son números reales.*

(ii) *Funciones propias correspondientes a valores propios distintos del sistema $(S-L)$ son ortogonales respecto al producto interior $<,>_s$.*

Definición 5.2.3 *Un sistema regular de Sturm-Liouville se dice coercivo si existe un $\alpha_0 > 0$ tal que*

$$< Lu, u > \geq \alpha_0 \left(\|u\|_2 + \|u'\|_2 \right)^2 \quad \forall u \in D_0 = \left\{ u \in C^2([a,b]) : B_1(u) = B_2(u) = 0 \right\}.$$

Se dice que el sistema es casi-coercivo si $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tal que el operador $L - \mu s$ es coercivo.

Todos los problemas regulares de Sturm-Liouville que estudiaremos en este curso son casi-coercivos. De manera concreta, se puede probar que todo sistema de Sturm-Liouville con condiciones periódicas o separadas es casi-coercivo.

El principal resultado de este capítulo es el siguiente teorema de descomposición espectral de Sturm-Liouville el cual generaliza al caso infinito-dimensional lo que sucede en el caso en que L es una matriz autoadjunta.

Teorema 5.2.1 (Sturm-Liouville) *Dado un sistema de Sturm-Liouville regular y casi-coercivo, se tiene que el conjunto de sus valores propios es una sucesión creciente de números reales*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Además, existe una base ortonormal de* $L_s^2([a,b])$ *formada por funciones propias* $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$. *En el caso de que* $u \in D_0 = \left\{u \in C^2([a,b]) : B_1(u) = B_2(u) = 0\right\}$, *la serie de Fourier*

$$\sum_{n=1}^{\infty} < u, \mathbf{e}_n > \mathbf{e}_n$$

converge uniformemente a u.

Concluimos este capítulo estudiando un par de ejemplos concretos de sistemas regulares de Sturm-Liouville, uno con condiciones de contorno separadas y otro con condiciones periódicas.

Ejemplo 5.2.1 *Consideremos el problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(l) = 0 \end{array} \right. .$$

Si $\lambda = 0$, *la solución general de la ecuación* $u'' = 0$ *es*

$$u(x) = c_1 + c_2 x.$$

Al imponer las condiciones de contorno se obtiene $c_1 = c_2 = 0$ *con lo cual* $u = 0$.

Si $\lambda < 0$, *la solución general de la ecuación* $u'' + \lambda u = 0$ *es*

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Al imponer las condiciones de contorno $u(0) = u'(l) = 0$ *se obtiene el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = u(0) = c_1 + c_2 \\ 0 = u'(l) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{array} \right.$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$ *ya que*

$$\left| \begin{array}{ll} 1 & 1 \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} & -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{array} \right| \neq 0.$$

Por tanto, nuevamente $u = 0$.

Si $\lambda > 0$, *la solución general de la ecuación* $u'' + \lambda u = 0$ *es*

$$u(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

y al imponer las condiciones de contorno se tiene

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Por tanto, eliminando el caso trivial $c_1 = c_2 = 0$ *que conduce a* $u = 0$*, se tiene que* $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$ *y así,*

$$\lambda = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right]^2.$$

Con ello se obtiene la sucesión creciente de valores propios $\lambda_n = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right]^2$ *y las funciones propias*

$$u_n(x) = \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right]$$

cuya norma en $L^2([0,l])$ *viene dada por*

$$\|u_n\|_2 = \left(\int_0^l \sin^2\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right] dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{l}{2}}.$$

Nótese que se satisface el Teorema de Sturm-Liouville ya que los valores propios de nuestro problema forman una sucesión creciente que tiene límite infinito. Además, el sistema de funciones propias

$$\left\{\left(\frac{l}{2}\right)^{-1/2}\sin\frac{\pi x}{2l}, \left(\frac{l}{2}\right)^{-1/2}\sin\frac{3\pi x}{2l}, \cdots, \left(\frac{l}{2}\right)^{-1/2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \cdots\right\}$$

es una base ortonormal de $L^2([0,l])$.

Ejemplo 5.2.2 *Consideremos ahora el problema*

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(-\pi) = u(\pi) \\ u'(-\pi) = u'(\pi) \end{cases}.$$

Si $\lambda = 0$*, la solución general de la ecuación* $u'' = 0$ *es* $u(x) = c_1 + c_2 x$*. Al imponer las condiciones de contorno se obtiene* $c_2 = 0$ *con lo cual* $u = 1$ *es una autofunción correspondiente al autovalor* $\lambda = 0$.

Si $\lambda < 0$*, la solución general de la ecuación* $u'' + \lambda u = 0$ *es*

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Al imponer las condiciones de contorno se obtiene el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi}\right) + c_2\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0 \\ c_1\sqrt{-\lambda}\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi}\right) + c_2\sqrt{-\lambda}\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$ *ya que el determinante del sistema es no nulo. Por tanto,* $u = 0$.

Si $\lambda > 0$*, la solución general de la ecuación* $u'' + \lambda u = 0$ *es*

$$u(x) = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

y al imponer las condiciones de contorno se tiene

$$\begin{cases} 2c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \\ 2c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0. \end{cases}$$

Por tanto, eliminando el caso trivial $c_1 = c_2 = 0$ *que conduce a* $u = 0$, *se tiene que* $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, *de donde se obtienen los autovalores*

$$\lambda_n = n^2$$

y las funciones propias

$$\{\cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}.$$

Por tanto, tal y como vimos en el capítulo dedicado a los espacios de Hilbert, el sistema

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

es una base ortonormal de $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$. *Obsérvese que, en este caso, asociadas a un mismo valor propio* $\lambda_n = n^2$ *tenemos las dos autofunciones* $\sin nx$ *y* $\cos nx$.

5.3 Ejercicios

1. Sea $Lu = -(pu')' + qu$ el operador de Sturm-Liouville. Demuestra que

$$< Lu, v > = < u, Lv >$$

para cada $u, v \in \mathcal{D}_0 = \left\{u \in C^2([a,b] : \mathbb{R}) : u'(a) = v'(a) = 0 \text{ y } u'(b) = v'(b) = 0\right\}.$

2. Encontrar los autovalores y las autofunciones correspondientes a los siguientes sistemas regulares de Sturm-Liouville:

$$(a) \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u(l) = 0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u'(l) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = u(0) \\ u'(l) = u(l) \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} u'' - a^2 u + \lambda u = 0, \ a = cte. \\ u(0) = 0 \\ u(l) = 0 \end{cases}$$

3. Probar que la única función $u \in C^2([0,l])$ que satisface las dos siguientes condiciones:

(a) $u(0) = u(l) = 0.$

(b) $\int_0^l u(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$

es la función idénticamente nula, esto es, $u = 0$.

4. Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda s u \\ u(0) = 0 \\ u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

y sea $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base ortonormal de autofunciones asociada a dicho problema. ¿Es cierto que se cumple la desigualdad

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\ dx > \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \mathbf{e}_n(x) \sin(x)\ dx \right)?.$$

Justifica la respuesta.

5.4 Objetivos

- Entender el concepto de sistema regular de Sturm-Liouville.
- Conocer el Teorema de Sturm-Liouville.
- Adquirir habilidad en el cálculo de los autovalores y las autofunciones de problemas de Sturm-Liouville con condiciones de contorno separadas y periódicas.

5.5 Comentarios sobre la Bibliografía

En la elaboración de este capítulo hemos seguido [21]. Es precisamente en esta referencia donde pueden encontrarse las demostraciones de los resultados que hemos enunciado a lo largo de todo el capítulo.

En [8, p.p. 86-93] también se abordan los contenidos de este capítulo. Referencias en castellano donde también se estudia este tema son [13, Cap. 13], [17, p.p. 132-153] y [22, Cap. 4].