Capítulo 4

Series de Fourier Trigonométricas

En el capítulo anterior hemos visto que toda función $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ se puede desarrollar en serie trigonométrica de senos y cosenos del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.1}$$

la cual además converge en L^2 a la función f. Quedan pendientes otras muchas cuestiones concernientes a estas series, cuestiones del tipo:

¿ Bajo qué condiciones (4.1) converge puntual y/o uniformemente a la función f?

¿Bajo qué condiciones se puede derivar y/o integrar (4.1)? En los casos en los que esta respuesta sea afirmativa, ¿qué relación existe entre la derivada (o la integral) de f y la derivada (o la integral) de (4.1)?

En este capítulo daremos respuesta a cada una de estas cuestiones. Es importante señalar también que al margen de las EDPs, las series de Fourier son una herramienta básica en algunos campos de la ingeniería, especialmente en los relacionados con la Teoría de la Señal.

4.1 Series de Fourier de Funciones Periódicas

Se dice que la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ (ó } \mathbb{C})$$

es $2\pi-$periódica si para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface que

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Las funciones trigonométricas $\sin x$ y $\cos x$ son los ejemplos más elementales de funciones $2\pi-$periódicas.

Definición 4.1.1 *Supongamos que f es $2\pi-$periódica y absolutamente integrable en $[-\pi,\pi]$. Llamaremos **serie de Fourier** de la función f a la serie de funciones*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.2}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad , \ n \geq 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \; dx \quad , \; n \geq 1.$$

Los coeficientes a_n y b_n se denominan ***coeficientes de Fourier*** *de la función f.*

Nota 4.1.1 Nótese que lo único que estamos haciendo en la definición anterior es escribir f como combinación lineal de los elementos de la base

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \bigcup \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

en el espacio de Hilbert $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$.

Teniendo en cuenta la definición de los coeficientes de Fourier, un simple cálculo muestra que si f es impar (esto es, $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), entonces

$$a_n = 0 \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \; dx \tag{4.3}$$

y si f es par (esto es, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), entonces

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \; dx \quad \text{y} \quad b_n = 0. \tag{4.4}$$

Uno de los objetivos prioritarios de este tema es averiguar en qué forma se parecen f y su serie de Fourier asociada. Un primer resultado en esta dirección que hemos heredado del capítulo anterior es el siguiente:

Teorema 4.1.1 ***(Convergencia en L^2 o en media cuadrática)*** *Si f es $2\pi-$periódica y además $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$, entonces la serie de Fourier de f converge en la norma de $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ a la función f. Además,*

$$\|f\|_2^2 = \frac{\pi\,|a_0|^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right). \qquad \textit{(Identidad de Parseval)}$$

Estudiaremos a continuación un par de ejemplos concretos.

Ejemplo 4.1.1 *Consideremos la función $2\pi-$periódica definida como*

$$f(x) = |x| \quad \textit{para} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

y $f(x+2\pi) = f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Se trata de una función par, y por tanto $b_n = 0$. Además,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \; dx = \pi$$

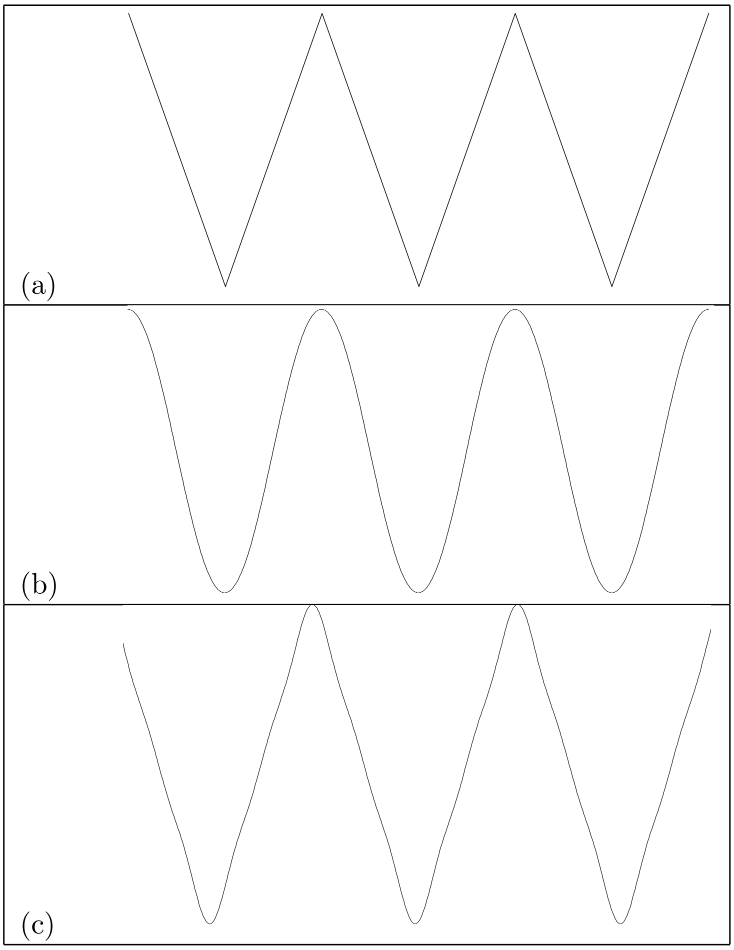
y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx \; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier asociada a f es

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\,x}{(2k-1)^2}.$$

Por supuesto $f\in L^2$, con lo que esta serie de Fourier converge a f en la norma de L^2.



En la gráfica anterior aparecen representados, en (a) la extensión $2\pi-$periódica de $f(x)=|x|$, en (b) S_1 y en (c) S_3, donde $S_n=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ es el término $n-$ésimo de la serie de Fourier asociada a f.

Ejemplo 4.1.2 *Consideremos ahora la función*

$$f(x)=x \quad \textit{para} \quad -\pi<x\leq\pi$$

y $f(x+2\pi)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Se trata de una función impar, y por tanto, $a_n=0$. Además,

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\;dx\\ &=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\;dx\right)\\ &=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

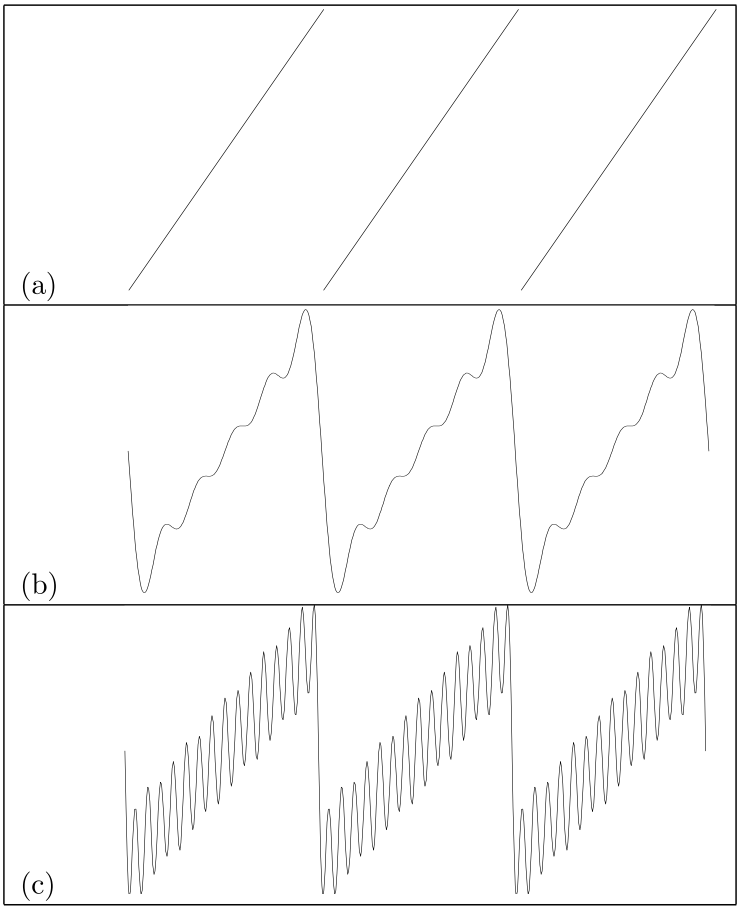
Por tanto, la serie de Fourier de f es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx.$$

También $f \in L^2$ con lo que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \right\|_2 = 0$$

es decir, la serie de Fourier converge en la norma de L^2 a f.



En la gráfica anterior aparecen representados, en (a) la gráfica de la extensión $2\pi-$periódica de $f(x) = x$, en (b) S_5 y en (c) S_{15}, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin kx$ es el término $n-$ésimo de la serie de Fourier asociada a f.

4.2 Teoremas de Convergencia para Series de Fourier

Recordaremos en primer lugar los conceptos de convergencia puntual y uniforme de series de funciones. Sea

$$f_n : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

una sucesión de funciones. Se dice que la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n(t,x)$ *converge puntualmente* a la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si para cada $(t,x) \in \Omega$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(t,x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t,x) - f(t,x)\right| < \varepsilon.$$

Se dice que la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n(t,x)$ *converge uniformemente* a la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t,x) - f(t,x)\right| < \varepsilon \quad \text{para todo } (t,x) \in \Omega.$$

Por supuesto, la convergencia uniforme implica convergencia puntual. Otro resultado importante es que si las funciones $f_n(t,x)$ son continuas y la serie $\sum_{n\geq 0} f_n(t,x)$ converge uniformemente a f, entonces la función f es continua. El criterio más útil que garantiza la convergencia uniforme de una serie de funciones es el llamado Criterio de Mayoración de Weierstrass. Dicho criterio afirma que si existe una sucesión de constantes positivas M_n tales que

$$|f_n(t,x)| \leq M_n \quad \forall \ (t,x) \in \Omega$$

y si además la serie numérica $\sum_{n\geq 0} M_n$ es convergente, entonces la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n(t,x)$ es uniformemente convergente.

Definición 4.2.1 *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice continua a trozos si existe una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ del intervalo $[a,b]$ tal que f es continua en cada uno de los subintervalos $]x_{k-1}, x_k[$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ y si existen los límites por la derecha y por la izquierda en cada punto x_k $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$, por la derecha en $a = x_0$ y por la izquierda en $x_n = b$. Es decir, si f es continua en $[a,b]$ salvo a lo más en un número finito de puntos donde presenta discontinuidades de primera especie finita.*

Definición 4.2.2 *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable a trozos si f y su primera derivada f' son continuas a trozos.*

Denotaremos por $PC(2\pi)$ (del inglés Piecewise Continuous) al conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas y continuas a trozos en el intervalo de periodicidad, que a partir de ahora supondremos será $[-\pi, \pi]$. Por $PS(2\pi)$ (en inglés Piecewise Smooth) denotaremos al conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas y diferenciables a trozos en el intervalo de periodicidad. Es evidente que toda función continua a trozos está en L^2, y por supuesto, lo mismo sucede con toda función diferenciable a trozos.

A partir de ahora denotaremos por $S_n(f,x)$ la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier en el punto x asociada a la función f, es decir,

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Teorema 4.2.1 (Convergencia Puntual) *Si* $f \in PS(2\pi)$, *entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$$

donde

$$f(x-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(x+h) \quad y \quad f(x+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x+h).$$

En particular

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ *donde* f *es continua.*

La demostración de este teorema (también conocido como Teorema de Dirichlet) es larga y complicada. Dicha demostración puede encontrarse en [8, Th. 2.1, p. 35], [19, Th. 2.6, p. 47] y también en [16, p.p. 106-109].

Veamos ahora que nos dice este teorema en relación a los dos ejemplos que hemos considerado anteriormente. Empecemos con la función

$$f(x) = |x| \quad \text{para} \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Se trata de una función continua que tiene derivada en todos los puntos del intervalo $]-\pi,\pi[$ excepto en el punto $x=0$. Además,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

es decir, $f \in PS(2\pi)$. Por tanto, el teorema de convergencia puntual anterior nos dice que

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

es decir, la serie de Fourier asociada a f converge puntualmente a la propia función f.

Consideremos ahora la función

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad -\pi < x \le \pi.$$

Se trata de una función continua en todo punto excepto en los puntos $k\pi$, con k un número impar. Por supuesto, también es una función diferenciable a trozos y por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx = x \quad \forall\, x \in \,]-\pi,\pi[\,.$$

Sin embargo, en los puntos de discontinuidad $k\pi$, con k impar, se tiene que $f(k\pi-) = \pi$ y $f(k\pi+) = -\pi$, con lo cual $\frac{1}{2}[f(k\pi-)+f(k\pi+)] = 0$, es decir, la serie de Fourier en estos puntos converge a cero, que no coincide con el valor de la función en estos puntos.

El siguiente resultado nos proporciona una condición suficiente que garantiza la convergencia uniforme de la serie de Fourier asociada a una función dada. Una demostración puede encontrarse en [8, Th. 2.5, p. 41] y también en [19, Th. 2.15, p. 57].

Teorema 4.2.2 (Convergencia Uniforme) *Sea f una función $2\pi-$periódica, continua y diferenciable a trozos en $[-\pi, \pi]$. Supongamos además que $f(-\pi) = f(\pi)$. Entonces, la serie de Fourier de f converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a la función f. Además, la serie de los coeficientes de Fourier*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

es convergente.

Nótese que la serie de Fourier que hemos estudiado en el Ejemplo 4.1.1 converge uniformemente a la función $2\pi-$periódica $f(x) = |x|$, ya que dicha función es continua y diferenciable a trozos. No sucede igual con la función considerada en el Ejemplo 4.1.2, donde no existe convergencia puntual de la serie de Fourier asociada a dicha función, y por tanto, tampoco existe convergencia uniforme en ningún intervalo que contenga un punto de discontinuidad de f.

Finalmente, veamos como se comportan las series de Fourier respecto de las dos operaciones fundamentales del Cálculo: la derivación y la integración. La demostración de los dos resultados que siguen a continuación puede encontrarse en [8, Ths. 2.3 y 2.4] y también en [19, Ths. 2.26 y 2.27, p. 77].

Teorema 4.2.3 ***(Derivación)*** *Sea f una función $2\pi-$periódica, continua, diferenciable a trozos y supongamos que f' es diferenciable a trozos en $[-\pi, \pi]$. Supongamos además que $f(-\pi) = f(\pi)$. Entonces,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

para todo punto $x \in \mathbb{R}$ donde f' es continua. Además, en los puntos en los que f' tiene saltos se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) = \frac{1}{2}\left[f'(x-) + f'(x+)\right]$$

Este teorema nos dice que si f es una función $2\pi-$periódica, continua, diferenciable a trozos y si f' es diferenciable a trozos, entonces la serie de Fourier asociada a f' se obtiene *derivando término a término* la serie de Fourier asociada a f.

Respecto de la integración, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.2.4 ***(Integración)*** *Sea f una función $2\pi-$periódica y continua a trozos. Si el término a_0 de la serie de Fourier asociada a f es nulo, entonces*

$$\int_0^x f(t)\ dt = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

con

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^x f(t)\ dt\right)\ dx$$

y donde la convergencia es uniforme. Si $a_0 \neq 0$, aplicamos el resultado anterior a la extensión $2\pi-$periódica de la función $f(x) - a_0/2$.

Este teorema nos dice que si f es una función $2\pi-$periódica y continua a trozos, entonces la serie de Fourier asociada a la primitiva de f se obtiene *integrando término a término* la serie de Fourier asociada a f. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.2.1 *Consideremos la función*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

La serie de Fourier asociada a f es

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x. \tag{4.5}$$

Dado que f es $2\pi-$periódica y continua a trozos, se satisfacen la hipótesis del teorema de integración anterior y por tanto, la serie de Fourier asociada a

$$\int_0^x f(t)\ dt = |x| \quad para \quad -\pi < x < \pi$$

se obtiene integrando término a término la serie (4.5). De esta forma obtenemos

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

4.3 Series de Fourier sobre Intervalos

Sea $f = f(x)$ una función periódica de periodo $2T$, $T > 0$. Mediante el cambio de variable $x = \frac{T}{\pi}y$, se tiene que la función

$$g(y) = f\left(\frac{T}{\pi}y\right)$$

es $2\pi-$periódica. Por tanto, si

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny + b_n\sin ny),$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny\ dy \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin ny\ dy,$$

es la serie de Fourier asociada a la función g, entonces, deshaciendo el cambio obtenemos que la serie de Fourier de la función de partida f es

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{T} + B_n\sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

donde

$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\ dx \quad \text{y} \quad B_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\ dx$$

y por tanto, éstos son los coeficientes de Fourier de la función $2T-$periódica f.

Nota 4.3.1 Lógicamente, todos los resultados que hemos obtenido en este capítulo para funciones $2\pi-$periódicas son válidos para funciones $2T-$periódicas.

Definición 4.3.1 *Sea $f :]0,\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos. Se denomina extensión par de f, de periodo 2π, a la función*

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in]0,\pi] \\ f(-x) & si \quad x \in]-\pi,0] \end{cases}$$

y lógicamente $f_p(x+2\pi) = f(x)$. Nótese que $f_p \in PC(2\pi)$ y es una función par.

Se denomina extensión impar de f, de periodo 2π, a la función

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in]0,\pi] \\ -f(-x) & si \quad x \in [-\pi,0[\\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

y también $f_i(x+2\pi) = f(x)$. Nótese que $f_i \in PC(2\pi)$ y es una función impar.

Dado que f_i y f_p son funciones impar y par, respectivamente, los coeficientes de Fourier de estas funciones se calculan por medio de las fórmulas (4.3) y (4.4).

4.4 Ejercicios

1. Sean f y g dos funciones $2\pi-$periódicas, continuas y diferenciables a trozos. Supongamos que f y g tienen los mismos coeficientes de Fourier. ¿Se satisface la igualdad $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$? ¿Por qué?

2. Sea $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$. Demuestra que si a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de la función f, entonces
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

3. **Unicidad de los coeficientes de Fourier.** Sean f y g dos funciones $2\pi-$periódicas, continuas a trozos, y supongamos que $f = g$ en todos los puntos de $[-\pi,\pi]$, excepto en un número finito de ellos. Probar que entonces los coeficientes de Fourier de las series de Fourier de f y g son iguales.

4. **Forma compleja de una serie de Fourier.** Sea
$$S(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$
la serie de Fourier asociada a una función $2L-$periódica f. Utiliza las expresiones complejas de las funciones $\sin x$ y $\cos x$ para probar que
$$S(f,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i}n\pi x/L}$$
donde
$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - \mathbf{i}b_n}{2} \quad y \quad c_{-n} = \frac{a_n + \mathbf{i}b_n}{2}.$$
Esta última forma de escribir una serie de Fourier se denomina forma compleja de la serie de Fourier.

5. Una de las aplicaciones de las series de Fourier es que nos permiten sumar determinadas series numéricas. Teniendo en cuenta los desarrollos en serie de Fourier de las funciones $2\pi-$periódicas $f(x) = |x|$ y $f(x) = x$, calcula la suma de las siguientes series numéricas:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Indicación: para (a) usar la identidad de Parseval y para (b) y (c) el teorema de convergencia puntual de series de Fourier.

6. Calcula los desarrollos en serie de Fourier de las extensiones par e impar de las funciones

$$(a) \quad f(x) = \frac{\pi - 2x}{4} \quad , \ 0 < x \leq \pi, \quad (b) \quad f(x) = x^2 \quad , \ 0 < x \leq \pi.$$

y estudia la convergencia en L^2, puntual y uniforme de dichas series.

7. Calcula el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ x-1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

y estudia la convergencia en L^2, puntual y uniforme de dicha serie.

8. Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Fourier cosenos de la función $f(x) = x^2$, calcula el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 2x$.

9. **Fenómeno de Gibbs.** Consideremos la función

$$f(x) = \pi - x \quad , \ 0 < x \leq 2\pi.$$

(a) Calcula el desarrollo en serie de Fourier de la extensión $2\pi-$periódica de f.

(b) Estudia la convergencia en $L^2([-\pi, \pi])$, puntual y uniforme de dicha serie de Fourier.

(c) Si dibujásemos diferentes sumas parciales de la serie de Fourier asociada a f observaríamos que a medida que añadimos más y más términos, dichas sumas parciales desarrollan picos o esquinas cerca del punto $x = 0$. Además, dichas esquinas tienden a cero en anchura pero no en altura. Este fenómeno se conoce con el nombre de *fenómeno de Gibbs*. ¿A qué crees que es debido este fenómeno? Esboza una gráfica aproximada de la suma parcial 20 (por ejemplo) de la serie de Fourier asociada a f. Indicación: para responder a esta cuestión no has de hacer ningún cálculo. Simplemente limítate a buscar una explicación razonable a esta cuestión basándote en los resultados que has obtenido en el apartado (b).

10. **Series de Fourier en Teoría de la Señal**. Una señal (onda de sonido, electromagnética....) se representa matemáticamente por medio de una función real de variable real $f = f(t)$, donde t normalmente representa el tiempo. La señal se dice periódica de periodo $T > 0$ si $f(t+T) = f(t)$ para todo tiempo t. La energía de una tal señal se define como

$$E(f) = \int_0^T |f(t)|^2 \ dt,$$

es decir, la norma al cuadrado en $L^2([0,T])$ de f. La potencia de la señal es $P(f) = E(f)/T$. Si escribimos la serie de Fourier asociada a f en forma compleja, esto es,

$$S(f,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i}n\pi t/T},$$

entonces el espectro (en amplitud) de la señal se dibuja representando en cada punto n/T un segmento (o flecha) de longitud $|c_n|$, es decir, se trata de representar amplitud frente a frecuencia. Estos números $|c_n|$ se denominan armónicos de la señal. Comprueba que

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 .$$

Supongamos que nos dan una señal periódica

$$f(t) = 1 - |t|, \quad |t| \leq 1.$$

Para esta señal, calcula su energía, su potencia y sus armónicos. Esboza también la gráfica de su espectro.

4.5 Objetivos

- Entender el concepto de serie de Fourier asociada a una función periódica y adquirir habilidad en el cálculo de los desarrollos en serie de Fourier.
- Entender los conceptos de convergencia en media cuadrática, puntual y uniforme.
- Conocer los resultados de convergencia de series de Fourier.

4.6 Comentarios sobre la Bibliografía

Como se ha mencionado repetidamente a lo largo del capítulo, las referencias básicas que hemos utilizado son los libros de Folland [8, Ch. 2] y Pinkus-Zafrany [19, Ch. 2].

Referencias en castellano que pueden ser muy útiles al alumno son los libros de Pedregal [16, p.p. 105-116] y Marcellán-Casasús-Zarzo [13, Cap. 12].

Respecto de las aplicaciones de las series de Fourier a la Teoría de la Señal, se recomienda [10].