Capítulo 10

Introducción al Método Variacional

Este capítulo pretende ser una introducción a uno de los métodos modernos más usados en la resolución de EDPs: el Método Variacional. A su vez, este método constituye la base teórica de uno de los métodos numéricos más populares en ingeniería: el Método de los Elementos Finitos.

La exposición rigurosa de este método (al igual que la mayoría de métodos que hemos presentado en este curso) exige unos prerrequisitos matemáticos bastante profundos. No obstante, es posible presentar, prescindiendo de algunos detalles técnicos, el método variacional con bastante precisión matemática.

Por otra parte, este tema también nos servirá para poder entender un poco mejor la Delta de Dirac de la cual, de un modo un tanto informal, nos hemos ocupado en los temas dedicados a las transformadas.

Empezaremos por motivar la necesidad de buscar un nuevo concepto de solución de una ecuación diferencial. Ello nos conducirá de un modo natural al concepto de distribución. Seguidamente introduciremos del modo más elemental posible las distribuciones y los espacios de Sobolev. Finalmente, esbozaremos el Método Variacional y lo aplicaremos a la resolución de algunos problemas típicos de EDPs de tipo elíptico.

10.1 Sobre el Concepto de Solución de una Ecuación Diferencial

Consideremos el problema de estudiar la flexión de una cuerda elástica de longitud L, sujeta en los extremos, y sobre la que actúa una determinada fuerza que representamos por medio de la función $f = f(x)$.

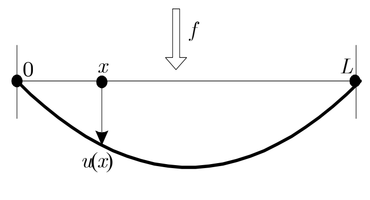


Figura 10.1: Cuerda elástica sujeta en los extremos y sobre la cual actúa la fuerza f.

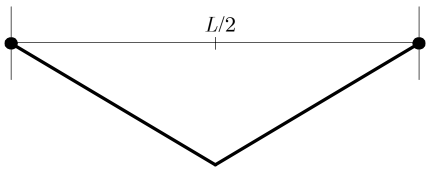
La ley de Hooke de la elasticidad lineal y el principio de conservación de la cantidad de movimiento nos conducen a la ecuación diferencial $-(\kappa u')' = f$ en $(0, L)$, donde $\kappa = \kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$ depende de las propiedades físicas de la cuerda. Si además, este experimento ocurre en un medio elástico, entonces dicho medio ejerce una fuerza (contraria a f) y que viene dada por $-\lambda u$, donde $\lambda = \lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$. De esta forma obtenemos la ecuación

$$-\left(\kappa u'\right)' + \lambda u = f \quad \text{en } (0, L) \tag{10.1}$$

y por tanto, el modelo matemático para este problema es

$$\begin{cases} -\left(\kappa u'\right)' + \lambda u = f & \text{en} \quad (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \tag{SP}$$

Supongamos ahora que la fuerza que actúa sobre la cuerda está localizada en un único punto $x = L/2$. Despreciando la fuerza que ejerce el medio elástico, entonces es evidente que la cuerda adopta la forma dada en el siguiente gráfico.



Pero una función como la dada en este gráfico no es diferenciable en $x = L/2$. Por tanto, una tal función no puede ser solución de la ecuación $-\left(\kappa u'\right)' = f$ en $(0, L)$, al menos en sentido clásico, es decir, en el sentido de ser u dos veces derivable en cada punto del intervalo abierto $(0, L)$ y verificando la ecuación diferencial en dicho intervalo. Este sencillo ejemplo muestra que es necesario entender mejor el concepto de solución de una ecuación diferencial.

¿Qué se puede hacer entonces?

Consideremos de nuevo el problema de la cuerda. Si la fuerza f produce un desplazamiento $v(x)$ en el punto x, entonces el trabajo producido por $f(x)$ es $f(x)v(x)$, con lo cual el trabajo ejercido por f a lo largo de toda la cuerda viene dado por

$$\int_0^L f(x)\, v(x)\ dx.$$

Procediendo de la misma forma en el término de la izquierda de (10.1) e integrando por partes,

$$\int_0^L -\left(\kappa(x)\, u'(x)\right)' v(x)\ dx = \int_0^L \kappa(x)\, u'(x)\, v'(x)\ dx$$

ya que $v(0) = v(L) = 0$. Este proceso transforma la ecuación diferencial $-\left(ku'\right)' + \lambda u = f$ en la ecuación integral

$$\int_0^L \kappa(x)\, u'(x)\, v'(x)\ dx + \int_0^L \lambda(x)\, u(x)\, v(x)\ dx = \int_0^L f(x)\, v(x)\ dx. \tag{10.2}$$

Por tanto, podemos pensar en una solución de (SP) como una función $u : [0, L] \to \mathbb{R}$, con $u(0) = u(L) = 0$, la cual satisface (10.2) para todos los posibles desplazamientos v tales que $v(0) = v(L) = 0$. Una de las principales ventajas de este procedimiento es que de esta forma reducimos el número de requerimientos que ha de satisfacer u. Sin embargo, aún quedan dos puntos principales que no están claros en absoluto:

(1) u debe ser al menos una vez derivable, pero éste no es el caso cuando f es una carga concentrada en un punto.

(2) si la carga está localizada en $x = L/2$ (es decir, $f(x) = 0$ para todo $0 \leq x \leq L$, $x \neq L/2$), entonces $\int_0^L f(x) v(x)\ dx = 0$ con lo cual $u = 0$ satisface (10.2), en contradicción con la experiencia física.

Estos dos hechos muestran que *es preciso entender mejor la forma de tratar matemáticamente con el concepto de carga localizada en un punto*. En una primera aproximación, supongamos que la carga está distribuida en una pequeña porción alrededor del punto $x = L/2$, esto es,

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & \frac{L}{2} - \varepsilon \leq x \leq \frac{L}{2} + \varepsilon \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El trabajo producido por esta carga produciendo un desplazamiento v viene ahora dado por

$$\int_0^L f_\varepsilon(x) v(x)\ dx = \int_{\frac{L}{2}-\varepsilon}^{\frac{L}{2}+\varepsilon} \frac{v(x)}{2\varepsilon}\ dx = v(\xi_\varepsilon),$$

donde $\frac{L}{2} - \varepsilon \leq \xi_\varepsilon \leq \frac{L}{2} + \varepsilon$, y la igualdad es debida al teorema de la media del Cálculo Integral. Tomando ahora límites para $\varepsilon \to 0$ y suponiendo que v es continua concluimos que el trabajo producido por una carga concentrada en el punto $L/2$ y produciendo un desplazamiento $v = v(x)$ vale $v(L/2)$. Por tanto, una forma de tratar matemáticamente con el concepto de carga localizada en un punto x_0 es por medio de una aplicación, llamémosla δ_{x_0}, la cual actúa sobre una cierta clase de funciones y produce números siguiendo la regla

$$\delta_{x_0} : v \mapsto < \delta_{x_0}, v > =^{\text{def}} v(x_0).$$

Este fue el origen de la Teoría de las Distribuciones descubierta por el matemático francés Laurent Schwartz en la década de los años 40, y por la que recibió en 1950 el premio de más prestigio con que puede ser galardonado un matemático: *la medalla Fields*.

10.2 Introducción a la Teoría de Distribuciones

En esta sección introduciremos las nociones mínimas sobre teoría de distribuciones que son necesarias para definir los espacios de Sobolev, los cuales juegan un papel esencial en el método variacional.

10.2.1 Definición de Distribución. Ejemplos

A lo largo de esta sección, Ω designará un conjunto abierto, acotado y no vacío de $\mathbb{R}^n$, con $n = 1, 2$ ó 3, y $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ denotará un punto genérico de Ω. Llamaremos multi-índice a todo elemento $\alpha \in \mathbb{N}^n$, esto es, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ donde $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Si $\varphi \in C^k(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$ denotaremos por

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

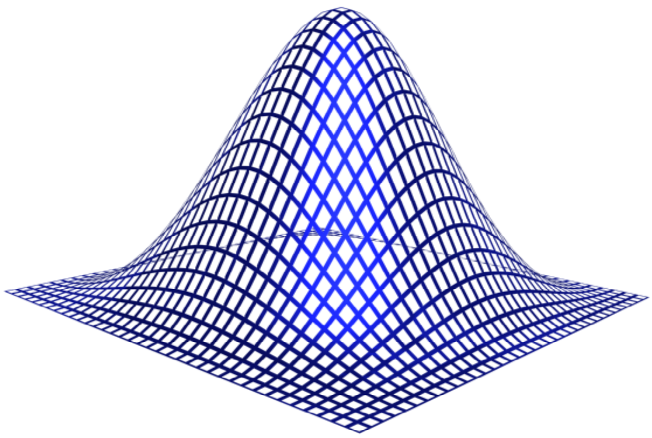
Dada una función continua $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, llamaremos soporte de φ, *sop* φ, al conjunto

$$sop\ \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos al espacio de las funciones test $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que son de clase C^∞ y con soporte compacto contenido en Ω. Es inmediato comprobar que $\mathcal{D}(\Omega)$ es no vacío; así por ejemplo, si $\mathbf{a} \in \Omega$ y $R > 0$ es tal que la bola de centro $\mathbf{a}$ y radio R está contenida en Ω, entonces la función

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 - R^2}} & \text{si} \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < R \\ 0 & \text{en} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

está en $\mathcal{D}(\Omega)$. En la gráfica que sigue se muestra el aspecto típico de una función test.



Definición 10.2.1 *Dada una sucesión* $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, *diremos que dicha sucesión converge en el sentido del espacio* $\mathcal{D}(\Omega)$ *a una función* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *si se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Existe un compacto* $K \subset \Omega$ *tal que sop* $\varphi_m \subset K$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

(ii) *La sucesión* $\partial^\alpha \varphi_m$ *converge uniformemente sobre* Ω *a* $\partial^\alpha \varphi$ *para todo multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definición 10.2.2 *Llamaremos distribución sobre* Ω *a toda aplicación*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \rightsquigarrow & < u, \varphi > \end{array}$$

tal que si $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *converge a* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *en el sentido del espacio* $\mathcal{D}(\Omega)$, *entonces*

$$\lim_{m\to\infty} < u, \varphi_m > = < u, \varphi > .$$

Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ *al espacio de todas las distribuciones sobre* Ω.

Veamos ahora dos de los ejemplos más destacados de distribuciones.

Ejemplo 10.2.1 *Consideremos el espacio* $L^1_{loc}(\Omega)$ *de las funciones* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que* $\int_K |f| < \infty$ *para cualquier compacto* $K \subset \Omega$. *No es nada difícil comprobar que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} u_f: & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \rightsquigarrow & < u_f, \varphi > = \int_\Omega f\varphi \end{array}$$

es una distribución sobre Ω. *Además, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que* $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *y por tanto, toda función de* $L^2(\Omega)$ *es también una distribución.*

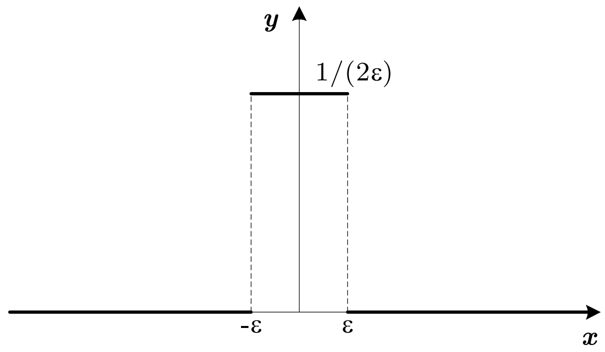
Ejemplo 10.2.2 *Dado* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, *se llama distribución Delta de Dirac centrada en* $\mathbf{x}_0$ *a la aplicación*

$$\begin{array}{llll} \delta_{x_0}: & \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \rightsquigarrow & <\delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi>=\varphi(\mathbf{x}_0) \end{array}$$

Por supuesto, se puede demostrar que efectivamente la aplicación anterior define una distribución. Se puede demostrar también, aunque esto ya no es tan evidente, que esta distribución no coincide con ninguna función del espacio $L^1_{loc}(\Omega)$.

Para interpretar físicamente la delta de Dirac, supongamos que $\Omega = \mathbb{R}$ *y consideremos, para* $\varepsilon > 0$, *la familia de funciones*

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & si\ -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$



Nótese que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\ dx = 1$. *Además, dado que* $f_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, *podemos considerar estas funciones como distribuciones. Denotaremos también por* f_ε *la distribución asociada (según el Ejemplo 10.2.1) a la función* f_ε. *Para* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *se tiene que*

$$< f_\varepsilon, \varphi >= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(x)\ dx = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon \varphi(\xi_\varepsilon), \quad -\varepsilon \leq \xi_\varepsilon \leq +\varepsilon,$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el primer teorema de la media para integrales. Si tomamos ahora límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ *obtenemos que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} < f_\varepsilon, \varphi >= \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > .$$

Nótese por tanto que la delta de Dirac δ_0 *es una buena forma de representar matemáticamente el concepto de carga concentrada en el punto* 0.

10.2.2 Cálculo con Distribuciones. La Derivada de una Distribución

Anteriormente hemos visto que toda función de L^2 es una distribución. En esta sección veremos que la derivación es una operación válida para cualquier distribución. Ello nos permitirá poder calcular la derivada de cualquier función de L^2, en particular, la *derivada de funciones no continuas*. Obviamente, esta operación de derivación no puede ser entendida en sentido clásico, sino en un sentido débil o distribucional que es el que pasamos a estudiar a continuación. Para motivar la definición de derivada de una distribución, supongamos que $f \in C^1(]a,b[)$ y que

$\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$. Como $f' \in C(]a,b[)$, podemos considerar f' como distribución y por tanto, integrando por partes se tiene que

$$< f', \varphi >= \int_a^b f'(x)\varphi(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\ dx = -< f, \varphi' >,$$

ya que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La identidad $< f', \varphi >= - < f, \varphi' >$ sigue teniendo sentido si se sustituye f por una distribución cualquiera $u \in \mathcal{D}'(]a,b[)$. Este hecho es el que inspira la siguiente definición.

Definición 10.2.3 *Dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos la derivada $\partial^\alpha u$ como la distribución*

$$\begin{array}{rlll} \partial^\alpha u: & \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \rightsquigarrow & < \partial^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi > \end{array}.$$

Es un simple ejercicio comprobar que $\partial^\alpha u$ es efectivamente una distribución. En el caso de que $f \in C^k(\Omega)$ y $|\alpha| \leq k$, entonces la derivada distribucional y funcional de f coinciden (obviamente, en el sentido de las distribuciones). Veamos ahora dos ejemplos muy interesantes.

Ejemplo 10.2.3 *Consideremos la función de Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

y veamos que su derivada distribucional coincide con la Delta de Dirac centrada en cero. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$< H', \varphi >= - < H, \varphi' >= -\int_0^\infty \varphi'(x)\ dx = -\varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > .$$

Ejemplo 10.2.4 *Consideremos la función*

$$u(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se trata de una función que pertenece al espacio $L^2(]-1,1[)$ y por tanto es una distribución. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$. Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} < u', \varphi >&= - < u, \varphi' > \\ = -\int_{-1}^0 (1+x)\varphi'(x)\ dx &- \int_0^1 (1-x)\varphi'(x)\ dx \\ &= \int_{-1}^0 1\varphi(x)\ dx + \int_0^1 -1\varphi(x)\ dx, \end{aligned}$$

es decir, la derivada distribucional de u, que denotamos por u', es la distribución asociada a la función

$$u'(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

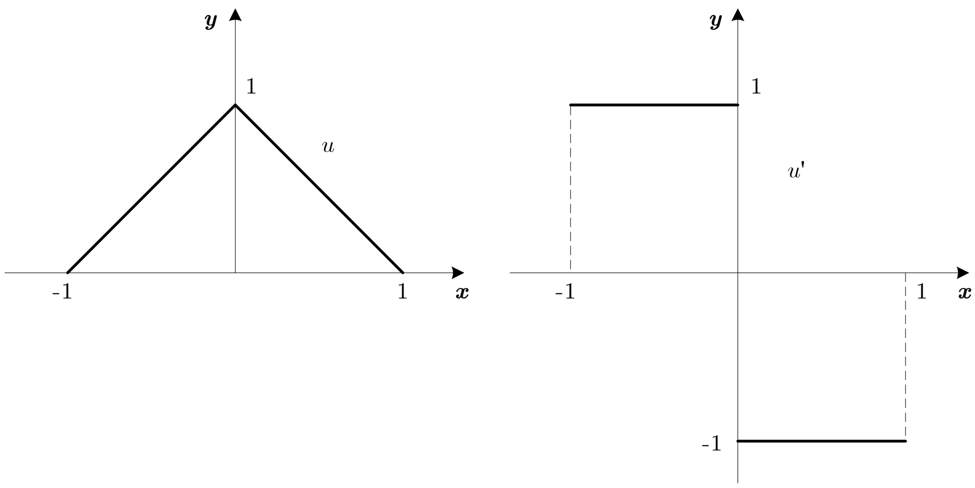


Figura 10.2: Gráficas de la función u y de su derivada distribucional u'.

Nótese que tanto u como su derivada distribucional u' pertenecen al espacio $L^2\left(\left]-1,1\right[\right)$. Además, u se anula en los extremos de dicho intervalo. Se dice entonces que u pertenece al espacio de Sobolev $H_0^1\left(\left]-1,1\right[\right)$. Nótese también que la función u no es derivable en sentido clásico en el punto $x = 0$.

Nota 10.2.1 La filosofía general para definir operaciones en el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de las distribuciones es la siguiente: supongamos que

$$T: \quad \mathcal{D}(\Omega) \quad \to \quad \mathcal{D}(\Omega)$$

es un operador lineal y continuo (respecto de la noción de convergencia introducida en el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$). Se dice que

$$T^*: \quad \mathcal{D}(\Omega) \quad \to \quad \mathcal{D}(\Omega)$$

es el operador dual de T si T^* es lineal y continuo y si además satisface que

$$\int_\Omega (T\varphi)(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\;d\mathbf{x} = \int_\Omega \varphi(\mathbf{x})\,(T^*\psi)(\mathbf{x})\;d\mathbf{x} \quad \forall \varphi,\psi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{10.3}$$

Nótese que, desde el punto de vista de las distribuciones, (10.3) puede escribirse en la forma

$$< T\varphi, \psi >=< \varphi, T^*\psi > .$$

Por tanto, generalizando al caso de distribuciones se tiene

$$< Tu, \psi >=< u, T^*\psi > \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ y } \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De la linealidad y la continuidad del operador T^* se deduce inmediatamente que $Tu \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De esta forma se pueden definir las transformadas de Laplace y Fourier de distribuciones y otras muchas operaciones. No entraremos sin embargo en detalle en estas cuestiones en este curso.

10.2.3 Espacios de Sobolev. La Desigualdad de Poincaré

Una vez tenemos a nuestra disposición las distribuciones, volvamos al problema (SP) o en particular a la ecuación integral (10.2). Para que el término de la derecha en (10.2) tenga sentido, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, todo lo que necesitamos es que $f, v \in L^2$. Para el término de la izquierda en (10.2), si suponemos que κ y λ son acotadas, entonces hemos de exigir que $u, v, u', v' \in L^2$, es decir, que u, v y sus derivadas (en el sentido de las distribuciones) estén en L^2. Esto nos conduce de un modo natural a introducir una clase de espacios que juegan un papel esencial en la teoría moderna de EDPs y que se denominan espacios de Sobolev. Es lo que hemos anticipado en el Ejemplo 10.2.4.

A lo largo de esta sección, Ω denotará un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ ó 3). Supondremos además que la frontera de Ω, que denotamos por $\partial\Omega$, es una curva de clase C^1 a trozos si $n = 2$, o una superficie regular a trozos y orientable si $n = 3$.

Definición 10.2.4 *Se llama espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ al espacio de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ cuyas derivadas parciales (en el sentido de las distribuciones) pertenecen a $L^2(\Omega)$, esto es,*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ 1 \le i \le n \right\}.$$

El espacio $H^1(\Omega)$ dotado del producto escalar

$$< u, v >_{H^1} = < u, v >_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} >_{L^2}$$

del cual deriva la norma

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

En la resolución de problemas de EDPs nos será especialmente útil el espacio

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1}$$

es decir, la clausura, respecto de la norma de H^1, del espacio de las funciones test $\mathcal{D}(\Omega)$. O dicho de otro modo, toda función de $H_0^1(\Omega)$ es, o bien una función test, o bien límite (respecto de la norma de H^1) de una sucesión de funciones test. Dicho espacio, con la norma que hereda de H^1, es también un espacio de Hilbert. Dicho de un modo un tanto impreciso, el espacio $H_0^1(\Omega)$ es el formado por las funciones de H^1 que se anulan sobre la frontera de Ω. Decimos "de un modo un tanto impreciso" dado que la frontera de Ω tiene medida nula, y dos funciones de L^2 que son iguales salvo en un conjunto de medida cero son, como funciones de L^2, iguales. Para eliminar esta ambigüedad se introduce el concepto de traza de una función de $H^1(\Omega)$. No entraremos en detalles sobre esta cuestión de la traza. Un ejemplo típico de función en $H_0^1(\Omega)$ es la considerada en el Ejemplo 10.2.4. Para ver los detalles de todas estas cuestiones referidas a la traza es preciso acudir a libros más especializados, como por ejemplo [2].

Enunciamos a continuación dos de los resultados más importantes de la Teoría de Espacios de Sobolev y que utilizaremos a menudo en lo que resta de capítulo. Para la demostración véase [2, T. 11. 6, p. 205, y T. 11.13, p. 210].

Teorema 10.2.1

(i) ***(Fórmula de Integración por Partes)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 a trozos (esto es, una curva de clase C^1 a trozos si $n = 2$ o una superficie regular a trozos y orientable si $n = 3$) y sean $u, v \in H^1(\Omega)$. Entonces*

$$\int_\Omega v(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \; d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} uvn_j \; d\sigma - \int_\Omega u(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \; d\mathbf{x}. \tag{10.4}$$

donde $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_n)$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

(ii) ***(Desigualdad de Poincaré)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^1} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Nota 10.2.2 Es importante tener presente que la integral sobre $\partial\Omega$ que aparece en (10.4) es una integral de línea si $n = 2$ y de superficie si $n = 3$.

10.3 Formulación Variacional Abstracta. El Teorema de Lax-Milgram

Aunque no es sencillo de probar, se puede demostrar que la delta de Dirac, definida en principio sobre el espacio de funciones test $\mathcal{D}(0, L)$, se puede extender a una forma lineal y continua definida sobre H_0^1, esto es, $\delta_{x_0} : H_0^1(0, L) \to \mathbb{R}$, definida como $< \delta_{x_0}, u >= u(x_0)$, para $u \in H_0^1$. Las funciones f de L^2 también pueden ser consideradas como formas lineales y continuas sobre H_0^1 por medio de la identidad

$$f : H_0^1 \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto < f, v >=^{\text{def}} \int fv.$$

Estas nuevas ideas conducen a una nueva formulación de (SP). De manera precisa, dada una forma lineal y continua $f : H_0^1 \to \mathbb{R}$ y una forma bilineal

$$a : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto a(u, v) = \int_0^L \kappa(x) u'(x) v'(x) \; dx + \int_0^L \lambda(x) u(x) v(x) \; dx$$

una función $u \in H_0^1$ se dice que es una solución débil de (SP) si la identidad

$$a(u, v) =< f, v >$$

se cumple para todo $v \in H_0^1$.

Todo lo anterior puede ser escrito de una forma más general (la cual es muy útil en la práctica como veremos más adelante) de la siguiente forma:

Definición 10.3.1 (Problema Variacional) *Dado un espacio de Hilbert $(H, \|\cdot\|)$, una forma lineal y continua $f : H \to \mathbb{R}$, y una forma bilineal $a : H \times H \to \mathbb{R}$, por problema variacional entendemos el problema de encontrar $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) =< f, v > \quad \text{para todo } v \in H. \tag{VP}$$

A este elemento $u \in H$ se le llama solución débil de (VP).

La existencia, unicidad, y dependencia continua respecto de los datos iniciales de solución débil para (VP) se obtiene a través de uno de los teoremas más bonitos y útiles de la Matemática Aplicada: el Teorema de Lax-Milgram. La demostración de este resultado puede encontrarse en [2, T. 12.6, p. 224]

Teorema 10.3.1 (Lax-Milgram) *Si la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es continua (es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$ para todo $u,v \in H$) y coerciva (esto significa que existe $m > 0$ tal que $a(u,u) \geq m\|u\|^2$ para todo $u \in H$), entonces el problema variacional (VP) tiene una única solución débil. Además,*

$$\|u\| \leq \frac{1}{m}\,|||f|||\,,$$

donde $|||f||| =^{def} \sup\{|< f,v >|\,,\ v \in H,\ \ \|v\| \leq 1\}\,.$

Respecto de las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, la continuidad de $a(\cdot,\cdot)$ se suele obtener como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La coercividad suele ser la parte más difícil de probar (desigualdades del tipo de la de Poincaré son lo que normalmente se necesita para probar la coercividad). No obstante, en unos pocos casos la coercividad se obtiene de manera sencilla. Por ejemplo, para el caso del problema (SP), fácilmente se obtiene

$$a(u,u) = \int_0^L \kappa(x)\left(u'\right)^2(x)\ dx + \int_0^L \lambda(x)\,u^2(x)\ dx \geq \min\{\kappa_0,\lambda_0\}\,\|u\|^2_{H_0^1}$$

10.4 Aplicación a los Problemas de Contorno de Tipo Elíptico

En esta sección aplicaremos la teoría variacional abstracta desarrollada en la sección anterior para resolver problemas concretos de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales.

10.4.1 El Caso Unidimensional

Este caso lo hemos ido estudiando poco a poco a lo largo de todo el capítulo, pero en cualquier caso y a modo de resumen lo estudiaremos de nuevo a continuación.

Consideremos el siguiente problema unidimensional

$$\text{(S-L)}\ \left\{\begin{array}{ll} -\left(\kappa u'\right)' + \lambda u = f & \text{en} \quad]0,L[\\ u(0) = u(L) = 0 & \end{array}\right.$$

donde

$$\kappa \in C^1([0,l];\mathbb{R})\ \ ,\ \kappa(x) \geq \alpha > 0,$$
$$\lambda \in C([0,l];\mathbb{R})\ \ ,\ \lambda(x) \geq 0,$$

y $f \in C([0,l];\mathbb{R})\,.$

La forma de proceder en el Método Variacional es esencialmente la siguiente: supongamos que u es una solución clásica de (S-L). Si multiplicamos la ecuación diferencial por una función v, que sea por ejemplo de clase C^2, entonces

$$-\left(\kappa u'\right)' v + \lambda uv = fv$$

e integrando ahora por partes en $]0,L[\,,$

$$-\left[\kappa(x)\,u'(x)\,v(x)\right]_0^L + \int_0^L \kappa u'v' + \int_0^L \lambda uv = \int_0^L fv.$$

Si la función v satisface que $v(0) = v(L) = 0$, entonces obtenemos

$$\int_0^L \kappa u'v' + \int_0^L \lambda uv = \int_0^L fv. \tag{10.5}$$

Nótese que para que la expresión anterior tenga sentido, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es suficiente con pedir que $u, u' \in L^2$, $v, v' \in L^2$ y que $f \in L^2$. Las derivadas de las funciones u y v no se entienden en sentido clásico sino *en el sentido de las distribuciones* (recuérdese que l*as funciones de L^2 no tienen porque ser continuas! y por tanto, no tiene porque existir su derivada en sentido clásico!*). Recuérdese también que en lugar de una función $f \in L^2$ podríamos poner de forma general una forma lineal y continua sobre H_0^1. En cualquier caso y para no complicar más el asunto pongamos que $f \in L^2$. Se dice que $u : [0, L] \to \mathbb{R}$ es una solución débil de (S-L) si $u \in H_0^1(]0, L[)$ y si

$$\int_0^L \kappa u'v' + \int_0^L \lambda uv = \int_0^L fv \quad \forall v \in H_0^1(]0, L[). \tag{10.6}$$

A esta formulación del problema (S-L) se le llama formulación variacional o débil.

Nos ocuparemos ahora de probar la existencia y unicidad de solución débil. Para ello consideremos la forma bilineal

$$\begin{array}{llll} a: & H_0^1 \times H_0^1 & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \rightsquigarrow & a(u, v) = \int_0^L \kappa u'v' + \int_0^L \lambda uv \end{array}$$

y la forma lineal

$$\begin{array}{llll} L: & H_0^1 & \to & \mathbb{R} \\ & v & \rightsquigarrow & L(v) = \int_0^L fv \end{array}.$$

La continuidad de a y L es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La coercividad de a es consecuencia de la desigualdad de Poincaré en el caso de ser $\lambda = 0$, y en caso de ser $\lambda > 0$ se obtiene de un modo trivial. Finalmente, y precisamente gracias a la coercividad se obtiene la dependencia continua de u respecto a f ya que

$$\alpha \|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u, u) = \int_0^l fu \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1}$$

de donde se obtiene que

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2}.$$

10.4.2 El Caso de las Dimensiones 2 y 3

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ó 3, un abierto acotado con frontera una curva de clase C^1 a trozos si $n = 2$, o una superficie regular a trozos y orientable si $n = 3$. Dadas dos funciones $\kappa : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y $\lambda : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, ambas de clase C^1, consideremos el problema de encontrar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\text{(PD)} \begin{cases} -div(\kappa \nabla u) + \lambda u = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua dada.

Deduciremos a continuación la formulación variacional de este problema. Supongamos que $u, v \in H_0^1(\Omega)$ y que $f \in L^2(\Omega)$. Si multiplicamos la ecuación $-div(\kappa \nabla u) + \lambda u = f$ por v e integramos por partes (Teorema 10.2.1) se obtiene que

$$\int_\Omega \kappa < \nabla u, \nabla v > + \int_\Omega \lambda uv = \int_\Omega fv$$

ya que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Fijada $f \in L^2(\Omega)$, a toda función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \kappa < \nabla u, \nabla v > + \int_\Omega \lambda uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

se le llama *solución débil* del problema (PD).

La existencia, unicidad y estabilidad de solución débil se obtienen como consecuencia del teorema de Lax-Milgram considerando la forma bilineal

$$\begin{array}{llll} a: & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \rightsquigarrow & a(u, v) = \int_\Omega \kappa < \nabla u, \nabla v > + \int_\Omega \lambda uv \end{array}$$

la cual, si suponemos que $\kappa > 0$ y $\lambda \geq 0$ son ambas acotadas, es continua y coerciva, y la forma lineal

$$\begin{array}{llll} L: & H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \rightsquigarrow & L(v) = \int_\Omega fv \end{array}$$

la cual es continua.

Nota 10.4.1 Nótese que una de las ventajas del método variacional en relación a los métodos descritos en capítulos anteriores es que nos permite resolver EDPs en recintos muy generales.

10.5 Ejercicios

1. Calcula la derivada distribucional de la función $f(x) = |x|$.

2. Consideremos la función

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   Comprueba que $u'' = \delta_{1/2}$. ¿Es u una función de $H_0^1(0, L)$? ¿Por qué?.

3. Calcula las derivadas sucesivas de la Delta de Dirac. ¿Puedes dar alguna interpretación física de estas derivadas?

4. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Se define la distribución fu como

$$fu : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto < fu, \varphi > = < u, f\varphi > .$$

   Comprueba que efectivamente $fu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

5. Se llama valor principal de $\frac{1}{x}$, denotado $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$, a la distribución que actúa como

$$< \mathrm{VP}\frac{1}{x}, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

   Demuestra que $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$ y que la función $\log|x|$ son distribuciones. Comprueba que la derivada distribucional de $\log|x|$ es $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$.

6. Estudiar variacionalmente el problema con condiciones de contorno mixtas

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en} \quad]0,1[\\ u(0) = 0 \; ; \; u'(1) = 1 \end{cases}$$

Indicación: trabajar en el espacio de Hilbert $H = \left\{ v \in H^1 (]0,1[) : v(0) = 0 \right\}$.

7. Sea $\lambda > 0$ una constante y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con frontera una superficie regular a trozos y orientable. Estudiar variacionalmente los problemas

$$(a) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = g & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

8. En este ejercicio estudiaremos un problema elíptico que aparece en Teoría de Lubricación. Consideremos la superficie $z = 0$ moviéndose a velocidad constante $(U_0, V_0, 0)$. Sea $h = h(x, y, z)$ la función que nos mide la separación entre la superficie $z = 0$ y un sólido situado sobre ella (o más bien sobre un fluido que separa ambas regiones). Supondremos además, por simplicidad, que se trata de un fluido incompresible de densidad constante ρ. Estamos interesados en conocer la velocidad del fluido $\mathbf{u} = (u, v, \omega)$ y su presión P. Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes y haciendo un análisis dimensional se obtienen las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} -P_x + \mu u_{zz} = 0 & \text{en la componente } x \\ -P_y + \mu v_{zz} = 0 & \text{en la componente } y \\ -P_z = 0 & \text{en la componente } z \end{array}$$

Tenemos además las condiciones de contorno

$$\begin{array}{ll} u = v = \omega = 0 & \text{en } z = h \\ u - U_0 = v - V_0 = \omega = 0 & \text{en } z = 0 \end{array}$$

Expresa u y v en función de la presión P y de los datos del problema. En concreto, demuestra que

$$u = \tfrac{1}{2\mu} P_x z (z - h) + U_0 \left(1 - \tfrac{z}{h}\right),$$

$$v = \tfrac{1}{2\mu} P_y z (z - h) + V_0 \left(1 - \tfrac{z}{h}\right)$$

Por tanto, el caudal del fluido viene dado por

$$q_1 = \int_0^h u(x, y, z) \; dz = \tfrac{U_0 h}{2} - \tfrac{h^3}{12\mu} P_x,$$

$$q_2 = \int_0^h v(x, y, z) \; dz = \tfrac{V_0 h}{2} - \tfrac{h^3}{12\mu} P_y$$

Recordemos que como se trata de un fluido incompresible,

$$u_x + v_y + \omega_z = 0,$$

pero como $\omega_z << u_x + v_y$ (dado que suponemos que h es mucho más pequeño que $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ que representa la región del plano $z = 0$ sobre la cual se mueve el objeto situado sobre ella) esta ecuación queda reducida a

$$u_x + v_y = 0$$

e integrando en esta ecuación con respecto a z entre 0 y h llegamos al problema

$$\begin{cases} \left(\frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_x\right)_x + \left(\frac{V_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_y\right)_y = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ P = P_0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Con el cambio $p = P - P_0$, el problema anterior se escribe como

$$\begin{cases} \left(\frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} p_x\right)_x + \left(\frac{V_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} p_y\right)_y = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ p = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Estudia variacionalmente dicho problema. En concreto, demuestra que el concepto natural de solución débil para este problema es una función $p \in H_0^1(\Omega)$, que satisface

$$\int_\Omega \frac{h^3}{12\mu} < \nabla p, \nabla \phi >= \int_\Omega \frac{h}{2} < (U_0, V_0), \nabla \phi > \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Demuestra que dicho problema tiene una única solución débil.

9. Sea $\Omega =]0, L[$ y

$$h(x) = \begin{cases} h_0 & \text{si} \quad x \in]0, L/2[\\ h_1 & \text{si} \quad x \in]L/2, L[\end{cases}$$

Comprueba que la solución del problema

$$\begin{cases} \left(\frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} P_x\right)_x = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ P = P_0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

está dada por

$$P(x) = \begin{cases} -6\mu \frac{2k + U_0 h}{h_0^3} x + P_0 & \text{si} \quad x \in]0, L/2[\\ 6\mu \frac{-2k + U_0 h_1}{h_1^3} (L - x) + P_0 & \text{si} \quad x \in]L/2, L[\end{cases}$$

donde la constante k vale

$$k = \frac{LU_0}{4} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2}\right) \left(\frac{1}{h_0^3} - \frac{1}{h_1^3}\right)^{-1}.$$

Comprueba que $P \notin C^1$.

10.6 Objetivos

El objetivo básico de este capítulo es iniciar al alumno en el estudio variacional de problemas de ecuaciones en derivadas parciales. Se trata de un método relativamente moderno que, como se ha mencionado antes, constituye la base teórica para el método de los elementos finitos. Es por tanto importante que el alumno disponga de esta base teórica para poder abordar con cierto rigor la asignatura El Método de los Elementos Finitos que se cursa en cuarto curso de esta titulación. Además, cada vez son más las empresas de ingeniería que utilizan de manera profesional un sotware de Elementos Finitos. Desde luego, no está de más que el futuro usuario de ese sotware conozca un poco mejor aquello que va a utilizar de manera profesional.

10.7 Comentarios sobre la Bibliografía

En la elaboración de este capítulo hemos usado esencialmente las referencias [2, 18, 21]. Es precisamente en el libro de Casas donde pueden encontrarse todas las demostraciones de los resultados enunciados en este capítulo.

Una presentación muy directa del tema y con la vista siempre puesta en el método de los elementos finitos se presenta en [5, 13].

Respecto de la Teoría de las Distribuciones, en el libro de Richards-Youn [20] se presenta este tema de una manera muy sencilla y con bastantes ejemplos físicos. Para un estudio más completo de la Teoría de las Distribuciones puede consultarse también el libro de Folland [8] donde además se estudian en detalle las transformadas de Fourier y Laplace de distribuciones.