TEORIA Y CUESTIONES

1. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

y denotemos por

$$S(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

la serie de Fourier asociada a la extensión $2\pi-$periódica de la función f.

Responde si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas y justifica la respuesta:

(a) (0.25 Ptos)

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \right) - f(x) \right|^2 dx = 0.$$

(b) (0.25 Ptos) $S(f,0) = 1$.

(0.5 Ptos) Sin necesidad de hacer ningún cálculo esboza las gráficas de la serie de Fourier truncada, por ejemplo por los términos $n = 2$ y $n = 20$, asociada a la función f. Eso sí, justifica adecuadamente las gráficas que dibujes.

2. **(1 Pto)** Explica y justifica brevemente el comportamiento de las ecuaciones del calor y de ondas respecto de las tres siguientes propiedades físicas: efecto regularizante, conservación de la energía, y velocidad de propagación.

3. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos la función

$$f_{\varepsilon,x_0}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\varepsilon} & \text{si} \quad x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{en} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_{\varepsilon,x_0}(x) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x = x_0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dicho límite se suele denotar por $\delta_{x_0}(x)$ y se suele llamar "función" *delta de Dirac centrada en* x_0. Se pide:

(a) (1 Pto) Comprueba que

$$[f_{\varepsilon,x_0}]^{\wedge}(\xi) = \begin{cases} e^{-\mathbf{i}\xi x_0} \frac{\sin(\xi\varepsilon)}{\xi\varepsilon} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad \xi = 0 \end{cases}$$

(b) (0.5 Ptos) Comprueba que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [f_{\varepsilon,x_0}]^{\wedge}(\xi) = e^{-\mathbf{i}\xi x_0}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Debido a la igualdad anterior, en algunos ambientes físicos e ingenieriles, se dice que la transformada de Fourier de la delata de Dirac centrada en x_0 es igual a $e^{-\mathbf{i}\xi x_0}$, es decir,

$$[\delta_{x_0}]^{\wedge}(\xi) = e^{-\mathbf{i}\xi x_0}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(c) **(0.5 Ptos)** ¿Qué es una distribución?. ¿Cómo se define, qué es, la delta de Dirac centrada en x_0 desde el punto de vista de la Teoría de las Distribuciones?

(d) **(0.5 Ptos)** En la Teoría de las Distribuciones se define la transformada de Fourier de una distribución u como la distribución $\widehat{u}$ que actúa de la siguiente forma

$$< \widehat{u},\ \varphi > \ = \ 2\pi < u,\ \widehat{\varphi} >, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

donde $\widehat{\varphi}$ denota la transformada de Fourier de la función test φ. Comprueba que, en el sentido de las distribuciones, la transformada de Fourier de la distribución delta de Dirac centrada en x_0 coincide con la distribución asociada a la función $f(t) = e^{-\mathbf{i}tx_0}, \quad t \in \mathbb{R}$, es decir, que se satisface la igualdad

$$< [\delta_{x_0}]^{\wedge},\ \varphi > \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathbf{i}tx_0}\varphi(t)\ dt,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

$$\boxed{\textsc{Problemas}}$$

3. **La ecuación de Euler uni-dimensional (también llamada ecuación de Burgers no viscosa) es un modelo sencillo para estudiar la propagación de fluidos perfectos incompresibles. Consideremos el siguiente problema de Cauchy para dicha ecuación**

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(t,x) + u(t,x)\,u_x(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{$\heartsuit$}$$

Se pide:

(a) **(1.25 Ptos) Utiliza el método de las características para probar que la solución de este problema viene dada de forma implícita por**

$$u(t,x) = f(x - u(t,x)\,t).$$

Esta expresión de la solución del problema ($\heartsuit$) nos dice únicamente que dicha solución translada el perfil inicial f a una velocidad que depende de la propia u. Con el fin de poder conocer de manera precisa el valor de u es preciso acudir a las curvas características del problema. Demuestra que las curvas características en el plano (t,x) están dadas por

$$x(t) = f(s)\,t + s$$

donde s indica el punto de partida de la correspondiente curva característica. Indica el valor de la solución u sobre la curva característica que parte del punto s_0.

Es inmediato comprobar que la curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & \gamma(s) = (0,s) \end{array}$$

es no característica, lo cual garantiza la existencia y unicidad de solución local. El sistema característico asociado al problema ($\heartsuit$) es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{dx}{d\tau} = u \\ \frac{du}{d\tau} = 0 \\ t(0) = 0;\ x(0) = s;\ u(0,s) = f(s) \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$\left\{ \begin{array}{l} t(\tau) = \tau \\ x(\tau) = f(s)\,\tau + s \\ u(t(\tau), x(\tau)) = f(s) \end{array} \right. \tag{$\diamond$}$$

De las dos primeras igualdades se deduce que

$$x(t) = f(s)\,t + s$$

y por tanto las curvas características son rectas que pasan por el punto $(0, s)$ y tienen pendiente $f(s)$.

Combinando las tres igualdades anteriores se tiene que

$$x = ut + s$$

y sustituyendo el valor de s en la tercera igualdad

$$u(t,x) = f(x - u(t,x)\,t).$$

Finalmente, la tercera igualdad en $(\diamond)$ nos dice que el valor de la solución u sobre la curva característica que parte de s_0 es justamente $f(s_0)$.

(b) (0.5 Ptos) Supongamos ahora que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 (salvo a lo sumo en un número finito de puntos), decreciente y que además satisface

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Dibuja el aspecto que tienen entonces las curvas características en el plano (t, x) y comprueba que las curvas características que parten de los puntos $s_0 < s_1$, respectivamente, se cortan en el tiempo

$$t = \frac{s_1 - s_0}{f(s_0) - f(s_1)}.$$

Se produce entonces lo que se denomina una onda de choque y la solución de nuestro problema deja entonces de estar, matemáticamente, bien definida. ¿Por qué?

Debido a que las características son rectas que pasan por $(0, s)$ y que tienen pendiente $f(s)$ y debido también a las hipótesis que hemos hecho sobre la función f se tiene que la pendiente de dichas rectas se aproxima a 1 para s muy negativo y además la pendiente de estas rectas va decreciendo hasta cero para s muy grande. Por tanto, dado que estas rectas (curvas características) no son paralelas, irremediablemente se cortan.

Consideremos dos de estas curvas, en concreto las que pasan por $(0, s_0)$ y $(0, s_1)$. Dichas curvas vienen dadas por

$$\begin{aligned} x_0(t) &= f(s_0)\,t + s_0 \\ x_1(t) &= f(s_1)\,t + s_1 \end{aligned}$$

Cuando estas dos rectas se cortan, obviamente $x_0(t) = x_1(t)$, esto es,

$$f(s_0)\,t + s_0 = f(s_1)\,t + s_1$$

de donde se deduce que

$$t = \frac{s_1 - s_0}{f(s_0) - f(s_1)}.$$

La solución del problema $(\heartsuit)$ deja de estar bien definida porque para esos valores de (t, x) para los que se produce el choque la función u toma dos valores distintos, los que provienen de las dos características, esto es, $u = f(s_0)$ y también $u = f(s_1)$.

(c) (0.25 Ptos) Demuestra que en caso de ser

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad x < 0 \\ 1 - x & \textbf{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \textbf{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

entonces la solución de $(\heartsuit)$ está dada por

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad x < t \\ \frac{1-x}{1-t} & \textbf{si} \quad t < x < 1 \\ 0 & \textbf{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $u(t,x) = f(x - u(t,x)t)$, entonces $u = 1$ cuando $x - ut = x - t < 0$, es decir, si $x < t$. Por otra parte,

$$u = f(x - ut) = 1 - (x - ut),$$

es decir,

$$u(t,x) = \frac{1-x}{1-t}$$

siempre que

$$0 < x - ut = x - \frac{1-x}{1-t}t < 1$$

o lo que es equivalente,

$$t < x < 1.$$

Finalmente, $u = 0 = f(x - ut)$ cuando $x - ut = x - 0t = x > 1$.

4. **Sea $\alpha > 0$ y consideremos el problema**

$$\text{(EO)} \begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,x) = 0; \quad u_t(0,x) = 0, & 0 < x < \pi \\ u(t,0) = 0\ ;\ u(t,\pi) = \sin(\alpha t), & t > 0 \end{cases}$$

que modeliza las vibraciones de una cuerda flexible y elástica de longitud π, que inicialmente está en reposo, con posición inicial también nula y de forma que su extremo izquierdo está fijo mientras que en el extremo $x = \pi$ tiene acoplado un oscilador. Se pide:

(a) (1.5 Ptos) Calcula, usando el método de separación de variables, la solución de (EO). Indicación: recordad de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que para encontrar una solución particular de una ecuación de la forma

$$z''(t) + c_1 z(t) = c_2 \sin(\alpha t)$$

con c_1, c_2 y α constantes es suficiente con probar con funciones de la forma

$$z(t) = c \sin(\alpha t),\ c = \text{cte.}$$

Empezaremos por transformar (EO) en otro problema que tenga condiciones de contorno nulas. Para ello efectuamos el cambio de variable

$$z(t,x) = u(t,x) - v(t,x),$$

con $u(t,x)$ la solución de (EO) y $v(t,x) = \frac{x}{\pi}\sin(\alpha t)$. Se tiene entonces que la función $z(t,x)$ es solución del problema

$$\text{(EO2)} \begin{cases} z_{tt}(t,x) = c^2 z_{xx}(t,x) + \frac{\alpha^2}{\pi} x \sin(\alpha t), & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ z(0,x) = 0; \quad z_t(0,x) = -\frac{\alpha}{\pi}x, & 0 < x < \pi \\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

En efecto, si calculamos las derivadas parciales segundas de $z(t,x)$ respecto de t y x se tiene que

$$z_{tt}(t,x) = u_{tt}(t,x) - v_{tt}(t,x) = u_{tt}(t,x) + \frac{\alpha^2}{\pi} x \sin(\alpha t)$$

y

$$z_{xx}(t,x) = u_{xx}(t,x) - v_{xx}(t,x) = u_{xx}(t,x).$$

Por tanto

$$z_{tt}(t,x) - c^2 z_{xx}(t,x) = u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) + \frac{\alpha^2}{\pi} x \sin(\alpha t) = \frac{\alpha^2}{\pi} x \sin(\alpha t)$$

ya que $u(t,x)$ satisface la ecuación de ondas dada en (EO).

Además,

$$z(0,x) = u(0,x) - v(0,x) = 0 - 0 = 0$$

y

$$z_t(0,x) = u_t(0,x) - v_t(0,x) = 0 - \frac{\alpha}{\pi}x = -\frac{\alpha}{\pi}x.$$

Finalmente

$$z(t,0) = u(t,0) - v(t,0) = 0 - 0 = 0 \quad \text{y} \quad z(t,\pi) = u(t,\pi) - v(t,\pi) = \sin(\alpha t) - \sin(\alpha t) = 0.$$

Como (EO2) es un problema para una ecuación no homogénea con condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas, lo primero que hemos de hacer ahora es calcular los autovalores y autofunciones del problema

$$\begin{cases} z_{tt}(t,x) = c^2 z_{xx}(t,x) \\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

Para ello proponemos una solución de la forma $z(t,x) = T(t)X(x)$ y tras derivar, sustituir en la EDP y en las condiciones de contorno obtenemos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) \end{cases}$$

Se trata de un problema que hemos estudiado varias veces en clase y que tiene como autovalores y autofunciones

$$\lambda_n = n^2, \quad (n \geq 1), \quad X_n(x) = \sin(nx).$$

Proponemos ahora como solución de (EO2) una función de la forma

$$z(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin(nx).$$

Tras derivar, sustituir en la ecuación de ondas no homogénea dada en (EO2) e imponer las condiciones iniciales $z(0,x) = 0$ y $z_t(0,x) = - - \frac{\alpha}{\pi}x$ obtenemos que las funciones $z_n(t)$ han de ser soluciones del problema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} z_n''(t) + (nc)^2 z_n(t) = b_n(t) \\ z_n(0) = 0 \\ z_n'(0) = a_n \end{cases} \tag{*}$$

donde

$$b_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{\alpha^2}{\pi}\sin(\alpha t)\, x \sin(nx)\right] dx = (-1)^{n+1}\frac{2\alpha^2}{\pi n}\sin(\alpha t)$$

y

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{\alpha}{\pi}x\sin(nx)\right] dx = (-1)^n \frac{2\alpha}{\pi n}.$$

Recordemos que la solución general de la ecuación diferencial ordinaria dada en (*) es suma de la solución general de la ecuación homogénea

$$z_n''(t) + (nc)^2 z_n(t) = 0$$

(cuya solución es $z_n^h(t) = c_n\cos(nct) + d_n\sin(nct)$) más una solución particular de la ecuación completa (probando con $z_n^p(t) = c\sin(\alpha t)$ fácilmente se obtiene que $z_n^p(t) = \frac{A_n}{(nc)^2 - \alpha^2}\sin(\alpha t)$, con $A_n = (-1)^{n+1}\frac{2\alpha^2}{\pi n}$). Finalmente, al imponer las condiciones iniciales del problema (*) se tiene que

$$z_n(t) = \frac{1}{nc}\left[B_n - \frac{\alpha A_n}{(nc)^2 - \alpha^2}\right]\sin(nct) + \frac{A_n}{(nc)^2 - \alpha^2}\sin(\alpha t).$$

Con ello se tiene que la solución del problema (EO2) es

$$z(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{nc}\left[B_n - \frac{\alpha A_n}{(nc)^2 - \alpha^2}\right]\sin(nct) + \frac{A_n}{(nc)^2 - \alpha^2}\sin(\alpha t)\right\}\sin(nx)$$

con $B_n = (-1)^n\frac{2\alpha}{\pi n}$. Finalmente, al ser $u(t,x) = v(t,x) + z(t,x)$ se tiene que la solución de (EO) es

$$u(t,x) = \frac{x}{\pi}\sin(\alpha t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{nc}\left[B_n - \frac{\alpha A_n}{(nc)^2 - \alpha^2}\right]\sin(nct) + \frac{A_n}{(nc)^2 - \alpha^2}\sin(\alpha t)\right\}\sin(nx)$$

(b) **(0.5 Ptos) Supongamos ahora que $\alpha = 5$ y $c = 1$. Supongamos también que con el fin de hacer más tratables las soluciones obtenidas en el apartado anterior, alguien propone truncar las series mediante las cuales se escriben dichas soluciones por el término $n = 3$, es decir, quedarse únicamente con los tres primeros términos de dichas series. ¿Crees que es esto una buena idea? ¿Por qué?**

Por supuesto que no es una buena idea truncar las series mediante las cuales se definen las soluciones de (EO) y (EO2) por el término $n = 3$. Si hacemos esto no nos daríamos cuenta que con estos valores de α y c el sistema entra en resonancia, es decir, en el término $n = 5$ aparece un cero en el denominador lo cual indica que la amplitud de las vibraciones se hace infinita, fenómeno éste que no detectaríamos si truncamos por $n = 3$.

5. **(2 Ptos) Utiliza la transformada de Laplace para calcular la solución del siguiente problema para la ecuación lineal del transporte**

$$\begin{cases} u_t(t,x) + cu_x(t,x) = 2, & t,x > 0 \\ u(0,x) = 0, & x > 0 \\ u(t,0) = t, & t > 0 \end{cases}$$

siendo $c > 0$ una constante.

Teniendo en cuenta que la transformada de Laplace de la función constante igual a 1 es $1/z$, la propiedad de linealidad de esta transformada y su comportamiento frente a la derivación, si calculamos la transformada de Laplace de la EDP del transporte obtenemos

$$-u(0,x) + z\mathcal{L}(u(\cdot,x))(z) + c\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(u(\cdot,x))(z) = \frac{2}{z}.$$

Si calculamos ahora

$$\mathcal{L}(u(t,0))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}t\,dt = \frac{1}{z^2}$$

y tenemos en cuenta la condición inicial $u(0,x) = 0$, entonces llegamos al problema transformado

$$\begin{cases} U_x(z,x) + \frac{z}{c}U(z,x) = \frac{2}{cz}, & x > 0 \\ U(z,0) = \frac{1}{z^2} \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

donde

$$U(z,x) = \mathcal{L}(u(\cdot,x))(z).$$

La solución del problema ($\spadesuit$) es

$$U(z,x) = -\frac{1}{z^2}e^{-\frac{x}{c}z} + \frac{2}{z^2}.$$

Si calculamos ahora la transformada inversa de Laplace de esta función se tiene

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t \le \frac{x}{c} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{z^2}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{si } t > \frac{x}{c} \end{cases} + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2}\right)(t) \\ &= \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t \le \frac{x}{c} \\ -\left(t - \frac{x}{c}\right) + 2t & \text{si } t > \frac{x}{c} \end{cases} \\ & \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t \le \frac{x}{c} \\ t + \frac{x}{c} & \text{si } t > \frac{x}{c} \end{cases} \end{aligned}$$

donde en los cálculos anteriores hemos tenido en cuenta el comprotamiento de la transformada inversa frente a la traslación.