Ingeniero Industrial
Asignatura: *Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales*
Convocatoria de Junio del 2004

TEORIA Y CUESTIONES

1. Sea $f:[0,+\infty[\ \rightarrow\mathbb{R}$ una función de clase C^1 y supongamos que se pueda calcular la transformada de Laplace tanto de f como de su derivada f'. Se pide:

(a) (1 Pto) Demuestra que entonces *formalmente* se tiene la identidad

$$\lim_{t\rightarrow+\infty}f(t)=\lim_{s\rightarrow0}s\mathcal{L}(f)(s). \qquad (\spadesuit)$$

Indicación: razonar de una manera similar a la utilizada para deducir el comportamiento de la transformada de Laplace frente a la derivación.

(b) (1 Pto) La fórmula ($\spadesuit$) es usualmente conocida como Teorema del valor final y en algunos casos (no todos!!) resulta muy útil para conocer el comportamiento asintótico (cuando $t\rightarrow+\infty$) de un determinado sistema, que se pueda estudiar haciendo uso de la transformada de Laplace, sin necesidad de calcular de manera explícita la solución de dicho sistema. Este es el caso del siguiente modelo para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t(t,x)=a^2u_{xx}(t,x), & t,x>0\\ u(0,x)=0, & x>0\\ u(t,0)=\delta(t), & t>0\\ |u(t,x)|\le M & t,x>0\end{cases}$$

donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac. Utiliza el método de la transformada de Laplace y la identidad ($\spadesuit$) para probar que

$$\lim_{t\rightarrow+\infty}u(t,x)=0 \quad \text{para cada } x>0.$$

2. **(1 Pto)** ¿Qué queremos decir cuando decimos que una determinada ecuación en derivadas parciales tiene un *efecto regularizante* sobre los datos iniciales? Explica y justifica brevemente el comportamiento de las ecuaciones del calor y de ondas respecto del efecto regularizante.

3. **(1 Pto)** Explica cómo se define la *derivada distribucional* y calcula la derivada, en el sentido de las distribuciones, de la función (distribución)

$$u(x)=\begin{cases} -\frac{x}{2}, & 0\le x<1/2\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{2}, & 1/2<x\le1\end{cases}$$

PROBLEMAS

4. Consideremos el siguiente problema de Cauchy para la ecuación lineal del transporte

$$(\heartsuit)\ \begin{cases} u_x(x,y)+u_y(x,y)=0, & x\in\mathbb{R},\ y>0\\ u(x,ax)=f(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

siendo $a\ge0$ una constante. Se pide:

(a) (0.25 Ptos) Calcula los valores de a para los que la curva $\gamma(s)=(s,\ as)$ es no característica.

(b) (1.25 Ptos) Calcula la solución del problema ($\heartsuit$).

(c) (0.5 Ptos) Dibuja las curvas características para el caso $a=0$.

(d) (0.25 Ptos) Supongamos que la variable y representa el tiempo t y x es una variable espacial. Si $u(x,t)$ representa la cantidad de contaminante que hay en la posición x en el tiempo t, entonces el modelo ($\heartsuit$) (poniendo $y = t$) describe la forma en que evoluciona la cantidad de contamiante con el tiempo. Interpreta entonces físicamente la solución calculada en el apartado **(b)** con $a = 0$ (*ayuda*: recordad la interpretación física de la solución de la ecuación de ondas a partir de la fórmula de d'Alembert).

5. Consideremos el siguiente problema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\text{(PC)} \begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + 1, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(0,x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 0.5 \\ 2 - 2x, & 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

Se pide:

(a) (1.25 Ptos) Aplica el método de separación de variables para calcular la solución $u = u(t,x)$ de este problema.

(b) (0.75 Ptos) ¿Cuánto vale $u(0,\ 0.5)$?. ¿Se cumple entonces que $u(0,x) = f(x)$ para todo $0 < x < 1$?. Justifica la respuesta.

6. En este ejercicio utilizaremos la transformada de Fourier para resolver el siguiente problema de *Neumann* para la ecuación de Laplace en un semiplano

$$\text{(P1)} \begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ u_y(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Lo haremos en varias etapas:

(a) (0.25 Ptos) Comprueba que con el cambio de variable

$$v(x,y) = u_y(x,y)$$

la función $v = v(x,y)$ es solución del problema de *Dirichlet* para el Laplaciano

$$\text{(P2)} \begin{cases} v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ v(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(b) (1.5 Ptos) Utiliza la transformada de Fourier para calcular la solución de (P2).

(c) (0.25 Ptos) Utiliza el cambio inverso, es decir, escribe

$$u(x,y) = \int v(x,t)\,dt$$

para comprobar que la solución de (P1) está dada por

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log\left[(x-t)^2 + y^2\right] f(t)\,dt.$$

Observaciones:

- Duración del examen: 4h.
- No se permite el uso de calculadora.