Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2001/02
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
24 de enero del 2001

TEORÍA Y CUESTIONES

1. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de funciones del espacio $L^2([0,\pi])$. Indica, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Existe una función continua $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $f(0) \neq f(\pi)$ y
   $$\int_0^{\pi} f(x)\phi_n(x)\,dx = 0,$$
   para cada $n \geq 1$.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la igualdad:
   $$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \phi_n(x)\,dx \right)^2$$
   Ayuda: La función constante igual a uno pertenece a $L^2([0,\pi])$

2. **(1 Pto.)** Enuncia de forma clara y detallada una condición suficiente para que la serie de Fourier de una función $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ sea puntualmente convergente a f. Como aplicación estudia y discute en función de los distintos valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergencia de la serie de Fourier de la función:
   $$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{\pi}, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos(x+\alpha), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

3. Sea un circuito eléctrico formado por una fuente de corriente $e = e(t)$, una bobina L y un condensador C. Si denotamos por $i = i(t)$ a la intensidad de corriente que circula por el circuito en cada instante, el modelo matemático que describe dicha intensidad está formado por la ecuación
   $$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' = e(t), \qquad t > 0$$
   junto con la condición inicial $i(0) = 0$. Suponiendo que $L = 2$ y $C = 8$, expresadas en sus unidades correspondientes, se pide:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Explica qué se entiende por función de transferencia de este sistema y calcúlala.

   (b) **(1 Pto.)** Utiliza la transformada de Laplace para resolver el problema anterior para una entrada de tipo delta de Dirac, $e(t) = \delta(t)$. Enuncia además de manera precisa todas las propiedades de la transformada de Laplace que uses en dicho proceso.

(c) **(0.5 Ptos.)** Suponiendo que la entrada del circuito es una función f que admite transformada de Laplace, es decir, $e(t) = f(t)$, con f transformable Laplace, utiliza las propiedades de dicha transformada para calcular el valor de la intensidad $i(t)$.

PROBLEMAS

1. **(2 Ptos.)** Resuelve mediante el método de las características la siguiente ecuación cuasilineal asociada a modelos de ondas de choque (shock-waves):

$$u_t(t,x) + u^2(t,x)u_x(t,x) = \beta \cos t, \qquad t > 0,\ x > 0$$

con la condición inicial:

$$u(0,x) = x, \qquad x > 0$$

2. Consideremos el problema no lineal,

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \beta u_x^2(t,x), & 0 < t,\ 0 < x < \ell \\ u(0,x) = u_0, & 0 < x < \ell \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(PNL)}$$

con $c, \beta \in \mathbb{R}$ constantes, que modela la evolución de la temperatura en un sistema equipado con un termostato sensible al gradiente térmico, que inicialmente está a una temperatura constante $u_0 \in \mathbb{R}$.

(a) **(1 Pto.)** Si u es una solución de (PNL), comprueba que $\omega(t,x) = \phi(u(t,x))$ es solución del problema lineal

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_t(t,x) = c^2 \omega_{xx}(t,x), & 0 < t,\ 0 < x < \ell \\ \omega(0,x) = \phi(u_0), & 0 < x < \ell \\ \omega(t,0) = \omega(t,\ell) = 1, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(PL)}$$

siendo $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la *transformación de Hopf-Cole* definida como $\phi(u) = e^{\beta u/c^2}$.

(b) **(1 Pto.)** Utiliza el resultado anterior para obtener la solución formal del problema (PNL) a partir de la de (PL).

3. Consideremos el problema de determinar las vibraciones transversales de una viga elástica de longitud infinita:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = 0, & 0 < t,\ -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(0,x) = 0, & -\infty < x < \infty \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

Se pide:

(a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Fourier para demostrar formalmente la igualdad

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos\left(t^2\xi\right)$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Sabiendo que la transformada de Fourier inversa de la función $\cos\left(t^2\xi\right)$ es

$$\frac{\cos\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2t}}$$

calcula la solución u del problema $(\heartsuit)$.

4. **(2 Ptos.)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera, $\partial\Omega$, es una superficie regular. Dado el siguiente problema de Dirichlet homogéneo:

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right\}$$

donde Δu es el laplaciano de u y $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$, deduce la formulación variacional del problema anterior y define el concepto de solución débil asociada al mismo.

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **4** horas.
