Ingeniero Industrial Curso 99\00

Asignatura: *Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales.*

Test sobre el Método de Separación de Variables. 27 de Noviembre de 1999.

SOLUCIONES

1. **Teoría**

(a) ¿Qué es un espacio prehilbertiano? ¿Qué es un espacio de Hilbert? ¿Qué es una base de Hilbert? Pon algún ejemplo de espacio de Hilbert y de base de Hilbert.

Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (eventualmente sobre $\mathbb{R}$). Llamaremos *producto interior* o escalar sobre H a toda aplicación

$$\begin{array}{llll} <,>: & H \times H & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & <x,y> \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades:

(i) $<x,x> \geq 0 \ \forall \ x \in H$ y $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$.

(ii) $<\alpha x+\beta y, z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z> \ \forall \ \alpha,\beta \in \mathbb{C}$ y $\forall \ x,y \in H$.

(iii) $\overline{<x,y>}=<y,x> \ \forall \ x,y \in H$.

Se llama *espacio prehilbertiano* al par formado por un espacio vectorial y un producto interior. Lo denotaremos por $(H,<,>)$.

Sea $(H,<,>)$ un espacio prehilbertiano. Se dice que $(H,<,>)$ es un *espacio de Hilbert* si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en H es convergente respecto de la norma asociada al producto interior, la cual viene dada por

$$\|x\| = +\sqrt{<x,x>} \quad \forall x \in H.$$

Un sistema ortonormal $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en un espacio de Hilbert H se dice que es una *base ortonormal o base de Hilbert* si es un sistema ortonormal maximal, es decir, si no existe ningún otro sistema ortonormal que contiene estrictamente a $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Un ejemplo de espacio de Hilbert es

$$L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R}) = \left\{ f:[-\pi,\pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

equipado con el producto interior

$$<f,g>=\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Una base de Hilbert de este espacio es

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots \right\}$$

(b) Enuncia el teorema de caracterización para bases de Hilbert.

Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hilbert.

(ii) Si existe un $x \in H$ tal que $< x, x_n >= 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.

(iii) Para todo $x \in H$ se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n.$$

(iv) Para todo $x \in H$ se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< x, x_n >|^2 . \quad \textbf{(Identidad de Parseval)}$$

2. **Cuestiones**

(a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable y tal que $f(x+\pi) = -f(x)$. Probar que f es $2\pi-$periódica y que su serie de Fourier sólo tiene términos impares.

Veamos en primer lugar que f es $2\pi-$periódica. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$f(x+2\pi) = f(x+\pi+\pi) = -f(x+\pi) = -(-f(x)) = f(x).$$

Veamos ahora que $a_{2n} = b_{2n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(t+\pi)\cos[2n(t+\pi)]\,dt \\ = -\frac{1}{\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(t)\cos[2nt]\,dt &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos[2nt]\,dt \\ &= -a_{2n} \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos hecho el cambio $x = t+\pi$, en la segunda hemos aplicado la hipótesis de ser $f(x+\pi) = -f(x)$ y de ser el coseno $2\pi-$periódico; y en la tercera hemos vuelto a aplicar el hecho de ser $f(x)$ y $\cos x$ ambas funciones $2\pi-$periódicas. Por tanto, $2a_{2n} = 0$ que obviamente implica $a_{2n} = 0$. Para probar que $b_{2n} = 0$ se razona exactamente igual que en el caso a_{2n}.

(b) Consideremos el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\textbf{(S-L)} \begin{cases} -\left(\left(1+x^2\right)u'\right)' + xu = \lambda e^x u \\ u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b) \end{cases}$$

¿Es (S-L) un sistema "regular" de Sturm-Liouville? ¿Por qué? ¿Es (S-L) "casi-coercivo"? ¿Por qué? Se trata efectivamente de un sistema regular de Sturm-Liouville ya que en este caso,

$p(x) = \left(1+x^2\right) \in C^1([a,b])$, $q(x) = x \in C([a,b])$ y $s(x) = e^x > 0$ $\forall x \in [a,b]$ y es continua y además las condiciones de contorno son autoadjuntas para el operador ya que son unas condiciones periódicas. Precisamente, el hecho de ser las condiciones periódicas es lo que asegura la casi-coercividad del sistema de Sturm-Liouville (recuérdese que vimos un resultado en clase que asegura lo que estoy diciendo).

3. **Consideremos la función**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(a) Calcula el desarrollo en serie de Fourier de la extensión $2\pi-$periódica de f.

Se tiene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}.$$

Por tanto, la serie de Fourier asociada a f es

$$S(f, x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

(b) Estudia la convergencia en $L^2([-\pi, \pi])$, puntual y uniforme de dicha serie de Fourier.

Obviamente, $f \in L^2([-\pi, \pi])$ ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \int_0^{\pi} dx = \pi < \infty.$$

Por tanto, la serie de Fourier asociada a f converje a f en $L^2([-\pi, \pi])$. También es evidente que f es diferenciable a trozos ya que es diferenciable en todos los puntos menos en el 0 (me estoy centrando en el intervalo $]-\pi, \pi[$; fuera de este intervalo se razona por periodicidad de f). Sin embargo, f no es continua en 0 y por tanto, el teorema de convergencia puntual de series de Fourier se tiene que

$$S(f, 0) = \frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{1}{2} \neq 1 = f(0).$$

Por tanto no hay convergencia puntual en 0 y por consiguiente tampoco hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ ya que la convergencia uniforme implica convergencia puntual. Sólo podemos asegurar la convergencia puntual en aquellos puntos donde f es continua; entre ellos se encuentra el punto $x = \frac{\pi}{2}$ que utilizaremos en el siguiente apartado.

(c) Como aplicación de (a) y (b) calcula la suma de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Basta con tener presente que

$$S(f,\pi/2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = f(\pi/2) = 1$$

ya que como hemos dicho en el apartado anterior, en el punto $x = \frac{\pi}{2}$ la serie de Fourier asociada a f converje puntualmente a $f(\pi/2) = 1$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. **Aplica el método de separación de variables para obtener la solución formal del problema**

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + 1 & t \geq 0,\ 0 < x < l \\ u(0,x) = 0 & 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Se trata de un problema del calor no homogéneo con condiciones de contorno homogéneas. Como vimos en clase, los autovalores y las autofunciones asociadas al problema homogéneo son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Como solución del problema no homogéneo proponemos la solución

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Derivando formalmente en esta expresión y sustituyendo en la ecuación del calor se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad ,t \geq 0,\ 0 < x < l$$

donde a_n son los coeficientes de Fourier de la extensión impar y $2l$ periódica de la función 1. En concreto:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}.$$

Con todo ello se tiene que $u_n(t)$ ha de ser solución de los siguientes problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} u_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t) = 0 \\ u_n(0) = 0 \end{cases} \quad \text{si } n \text{ es par} \tag{1}$$

(La condición inicial $u_n(0) = 0$ sale al imponer la condición $u(0,x) = 0$) y

$$\begin{cases} u_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t) = \frac{4}{n\pi} \\ u_n(0) = 0 \end{cases} \quad \text{si } n \text{ es impar.} \tag{2}$$

La solución de (1) es $u_n(t) = 0$ mientras que la solución de (2) es

$$u_n(t) = \frac{4l^2}{n^3\pi^3 a^2}\left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right).$$

Por tanto,

$$u(t,x) = \frac{4l^2}{\pi^3 a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\left(1 - e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

5. **La energía total de una cuerda de longitud π vibrando en un instante t, salvo una constante, es**

$$E(t) = \int_0^{\pi} \left[u_t^2(t,x) + c^2 u_x^2(t,x) \right] \, dx.$$

(El primer sumando en la integral es la energía cinética y el segundo la potencial). Si $u(t,x)$ es solución clásica del problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & t \geq 0, \ 0 < x < \pi \\ u(0,x) = f(x) \ ; \ u_t(0,x) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

demuestra que

$$E(t) = \frac{\pi c^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n)^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Observa que esto, en particular, nos da el principio de conservación de la energía: $E(t)$ es independiente de t. También nos sugiere que un requerimiento físico natural es que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n a_n)^2 + b_n^2 \right]$$

sea convergente. Esto es efectivamente cierto si f es continua y diferenciable a trozos y si g es continua a trozos. ¿Por qué?

Una posible forma de responder a este problema es la siguiente:

Veamos en primer lugar que $E'(t) = 0$. Por el teorema de derivación de integrales paramétricas se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \int_0^{\pi} \frac{d}{dt} \left[u_t^2(t,x) + c^2 u_x^2(t,x) \right] \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \left[2u_t(t,x) u_{tt}(t,x) + 2c^2 u_x(t,x) u_{xt}(t,x) \right] \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \left[2u_t(t,x) c^2 u_{xx}(t,x) + 2c^2 u_x(t,x) u_{xt}(t,x) \right] \, dx \\ &= 2c^2 \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} \left[u_t(t,x) u_x(t,x) \right] \, dx \\ &= \left[2c^2 u_t(t,x) u_x(t,x) \right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el hecho de que $u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x)$ y la última igualdad se debe a que $u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \forall t \geq 0$ y por tanto $u_t(t,0) = u_t(t,\pi) = 0$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} E(t) &= (constante) = E(0) = \int_0^{\pi} \left[u_t^2(0,x) + c^2 u_x^2(0,x) \right] \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \left[g^2(x) + c^2 \left(f'(x) \right)^2 \right] \, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2([-\pi,\pi])} + \frac{c^2}{2}\left\|f'\right\|^2_{L^2([-\pi,\pi])} \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + \frac{\pi c^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(na_n)^2
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad es consecuencia de la identidad de Parseval.

Finalmente, para poder garantizar que la serie numérica

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left[(na_n)^2 + b_n^2\right] \tag{3}
$$

es convergente es suficiente con pedir que f sea diferenciable a trozos (esto garantiza que $f' \in L^2$) y que g sea continua a trozos (esto garantiza que $g \in L^2$) y por tanto, la convergencia de (3) es otra vez consecuencia de la identidad de Parseval.