

Las matemáticas en las pelís de dibujos animados

Sergio Amat Plata
Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística
U.P. Cartagena
Enero 2012

Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Motivación



- Modelado y animación de formas complejas

- Modelado y animación de formas complejas
- Reconstruir un objeto en el ordenador

- Modelado y animación de formas complejas
- Reconstruir un objeto en el ordenador
 - Escaneado

- Modelado y animación de formas complejas
- Reconstruir un objeto en el ordenador
 - Escaneado
 - Ausencia de continuidad

- Modelado y animación de formas complejas
- Reconstruir un objeto en el ordenador
 - Escaneado
 - Ausencia de continuidad
- Algoritmos que permiten unir los puntos del diseño

- Modelado y animación de formas complejas
- Reconstruir un objeto en el ordenador
 - Escaneado
 - Ausencia de continuidad
- Algoritmos que permiten unir los puntos del diseño
- **Esquemas de multirresolución**

- Modelado y animación de formas complejas
- Reconstruir un objeto en el ordenador
 - Escaneado
 - Ausencia de continuidad
- Algoritmos que permiten unir los puntos del diseño
- Esquemas de multirresolución
 - **Compresión**

- Modelado y animación de formas complejas
- Reconstruir un objeto en el ordenador
 - Escaneado
 - Ausencia de continuidad
- Algoritmos que permiten unir los puntos del diseño
- Esquemas de multirresolución
 - Compresión
 - Eliminación de ruido

Pixar
NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

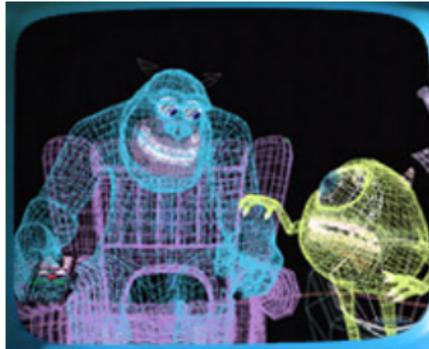
Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones



Índice

- 1 Pixar
- 2 NURBS
- 3 Esquemas de subdivisión
 - En qué consisten
 - Tipos de superficies
- 4 Esquemas de subdivisión no lineales
 - Deficiente aproximación con esquemas lineales
- 5 Interpolación en 1-d
 - Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs
- 6 Multirresolución de Harten
- 7 Multirresolución en 2-d
- 8 Compresión y eliminación de ruido en imágenes
- 9 Conclusiones

Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

John Lasseter fue el fundador de Pixar. El estudio líder en la animación cumple su primer cuarto de siglo con 11 exitosas películas, que han producido una taquilla mundial de 4.670 millones de euros.



- 1 Existe un antes y un después de Pixar.
Antes del 3 de febrero de 1986 la animación por ordenador no existía.
- 2 Había experimentos en el campo de efectos especiales y películas animadas de toda la vida con las que los estudios Disney vivían horas bajas.
Se produce la independencia de Pixar de los estudios Lucasfilms.
- 3 Se tarda 10 años en hacer la primera película (Toy Story) y otros 10 en hacer una película al año.
- 4 Ahora bien, en estos 25 años Pixar puede presumir de un total de nueve Oscar (a la mejor película de animación y al mejor cortometraje) y el honor de realizar la película animada más taquillera de la historia, Toy Story 3.

Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones



Hace poco han estrenado la secuela Cars 2 y están preparando Monsters University, algo que hasta ahora, a excepción de la trilogía de Toy Story, habían evitado.

NURBS

- Automóvil, Ingeniería Naval, etc

NURBS

- Automóvil, Ingeniería Naval, etc
- Bézier y Casteljaou

Curvas definidas a trozos

- NURBS: Non Uniform Rational B-Splines

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) w_i}$$

Curvas definidas a trozos

- NURBS: Non Uniform Rational B-Splines

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) w_i}$$

- $w_i \rightarrow$ pesos asociados a P_i

Curvas definidas a trozos

- NURBS: Non Uniform Rational B-Splines

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) w_i}$$

- $w_i \rightarrow$ pesos asociados a P_i
- **No uniformidad en $t_i \rightarrow$ Regularidad en las uniones**

Curvas definidas a trozos

- NURBS: Non Uniform Rational B-Splines

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) w_i}$$

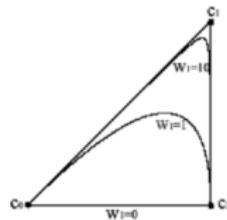
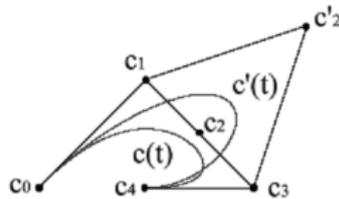
- $w_i \rightarrow$ pesos asociados a P_i
- No uniformidad en $t_i \rightarrow$ Regularidad en las uniones
- $B_{i,n}(t)$ B-Splines.

Curvas definidas a trozos

- NURBS: Non Uniform Rational B-Splines

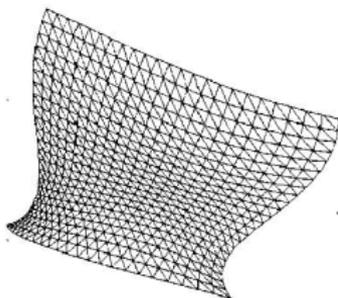
$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) w_i}$$

- $w_i \rightarrow$ pesos asociados a P_i
- No uniformidad en $t_j \rightarrow$ Regularidad en las uniones
- $B_{i,n}(t)$ B-Splines.
- Racionalidad \rightarrow círculos, esferas...



Pixar
NURBS

- Esquemas de subdivisión
- Esquemas de subdivisión no lineales
- Interpolación en 1-d
- Multirresolución de Harten
- Multirresolución en 2-d
- Compresión y eliminación de ruido en imágenes
- Conclusiones



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

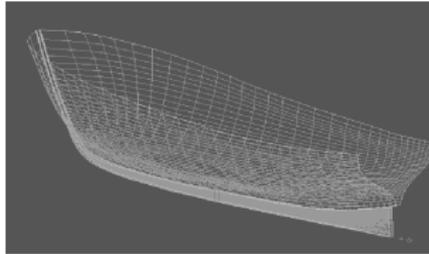
Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

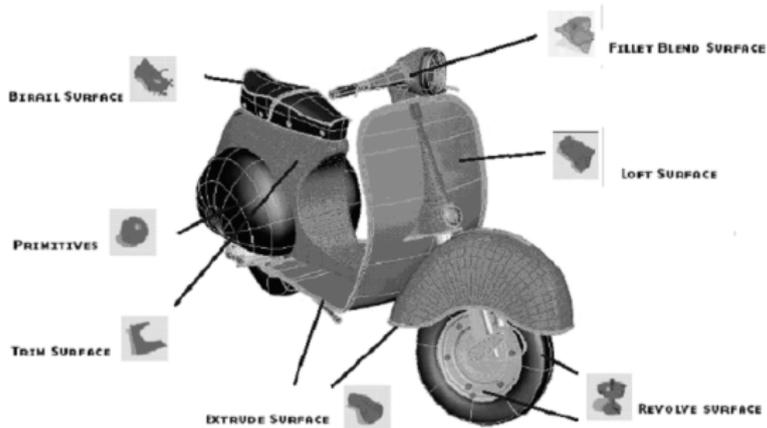
Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones



Pixar
NURBS

- Esquemas de subdivisión
- Esquemas de subdivisión no lineales
- Interpolación en 1-d
- Multirresolución de Harten
- Multirresolución en 2-d
- Compresión y eliminación de ruido en imágenes
- Conclusiones



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones



NURBS

Dificultades con las NURBS

- Complejidad de cálculo

NURBS

Dificultades con las NURBS

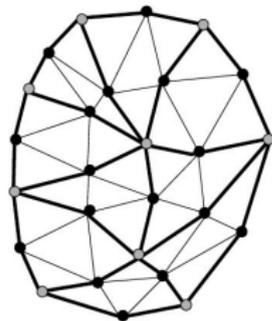
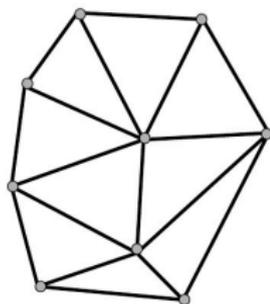
- Complejidad de cálculo
- Dificultad para mantener la suavidad cuando se anima el objeto

NURBS

Dificultades con las NURBS

- Complejidad de cálculo
- Dificultad para mantener la suavidad cuando se anima el objeto
- **Corrección de estos errores de manera manual**

Superficies de subdivisión



Mallado original. División del mallado

Superficies de subdivisión

Ventajas frente a las NURBS

- Eficiencia

Superficies de subdivisión

Ventajas frente a las NURBS

- Eficiencia
- Formas arbitrarias y geometría compleja

Superficies de subdivisión

Ventajas frente a las NURBS

- Eficiencia
- Formas arbitrarias y geometría compleja
- Control de las características de la superficie

Tipos de superficies

Inserción de vértices		
	<i>Redes triangulares</i>	<i>Redes cuadriláteras</i>
<i>Aproximación</i>	Loop	Catmull-Clark
<i>Interpolación</i>	Butterfly modificado	Kobbelt

Recorte de esquinas
Doo-Sabin
Midedge

Esquema de Pixar

- Elección de Catmull-Clark
 - Continuidad C^2 y C^1 en los vértices extraordinarios

Esquema de Pixar

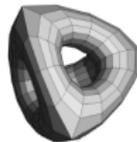
- Elección de Catmull-Clark
 - Continuidad C^2 y C^1 en los vértices extraordinarios
 - Problemas puntos angulosos



(a)



(b)



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

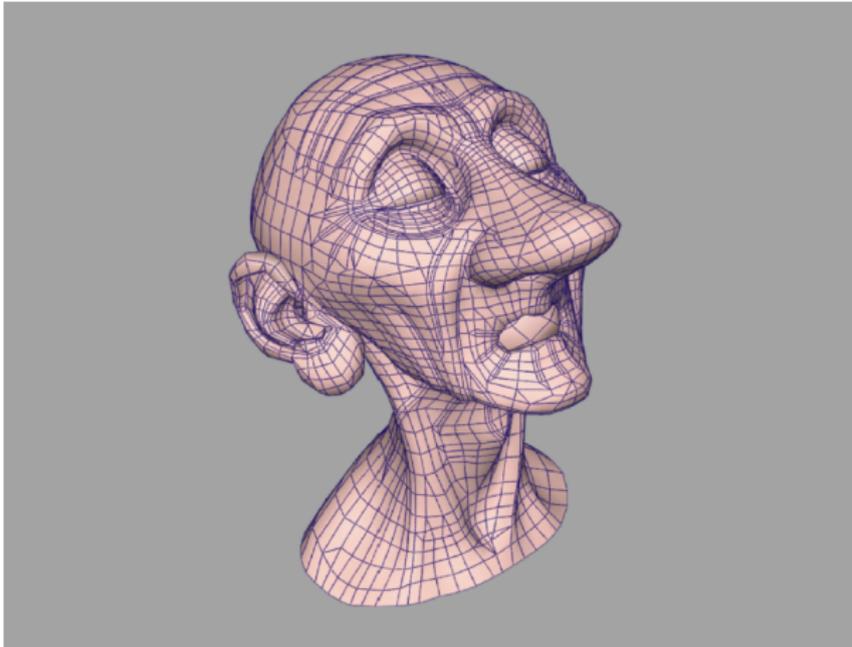
Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

En qué consisten

Tipos de superficies



- Otros campos asociados al esquema
 - Texturización
 - Sombreado

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

En qué consisten
Tipos de superficies

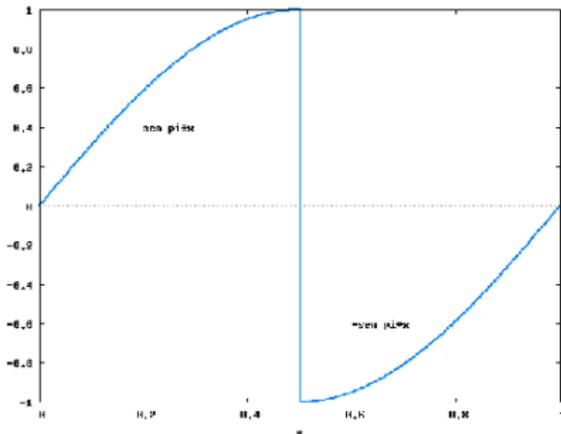


Algunos esquemas lineales

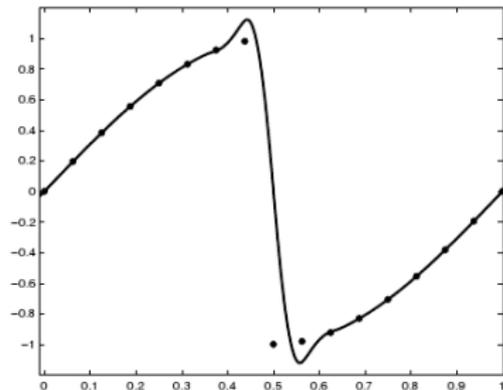
Lineales

- Interpolación polinomios Lagrange; 4 puntos, grado 3 función límite de clase C^1 . Dubuc, Dyn, Gregory, Levin.
- Usando Chaikin función límite de clase C^{2-} .
- Interpolación cúbica local y evaluación en $1/4$ y $3/4$. Límite C^2 . Dyn, Floater y Hormann.

Fenómeno Gibbs



Gráfica original



Discretización +
esquema lineal

Algunos esquemas no lineales

No lineales. Evitar el fenómeno Gibbs

- ENO, WENO, PPH. Modificación de los polinomios interpolatorios de Lagrange de grado 3. Límite C^{1-}
- ENO \rightarrow no estable
- WENO \rightarrow estable $\rightarrow C = 10^{18}$
- PPH \rightarrow estable $\rightarrow C = 9$

Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

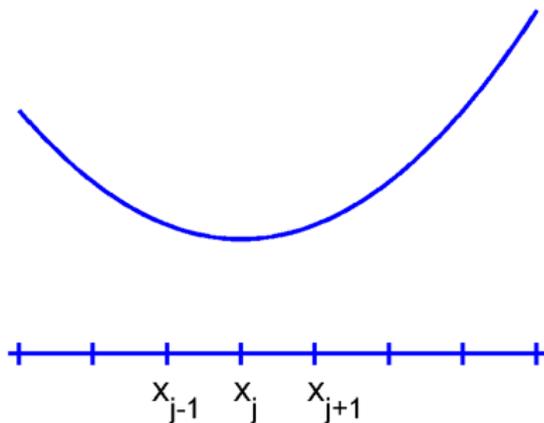
Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

Señal a reconstruir



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

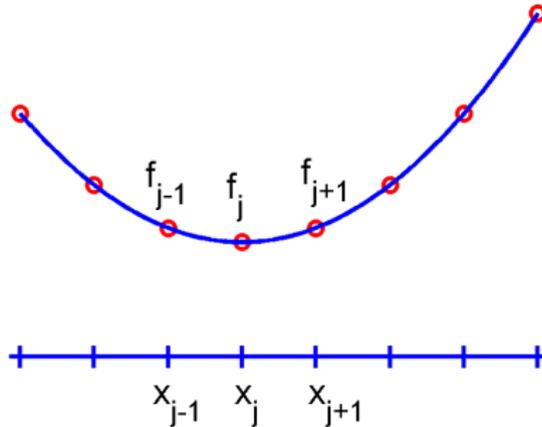
Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

Discretización



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

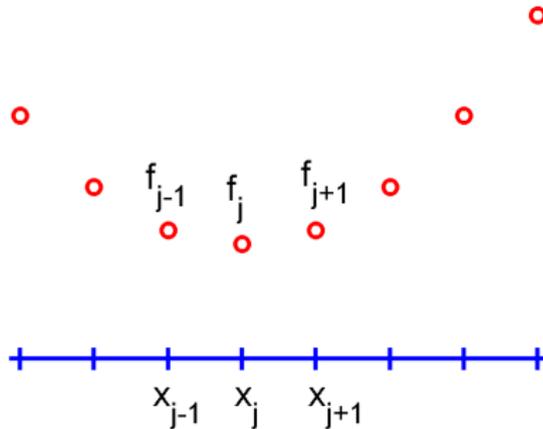
Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

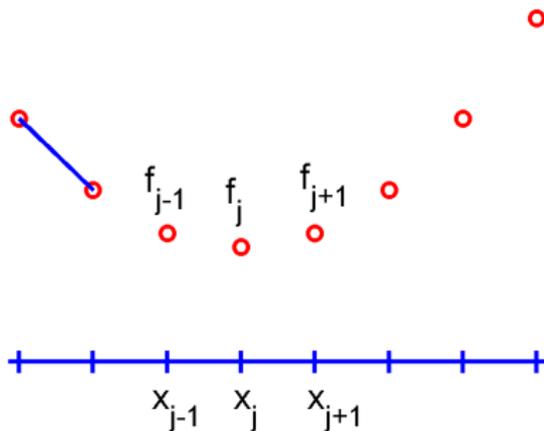
Conclusiones

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

Información que tenemos



Reconstrucciones a trozos



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

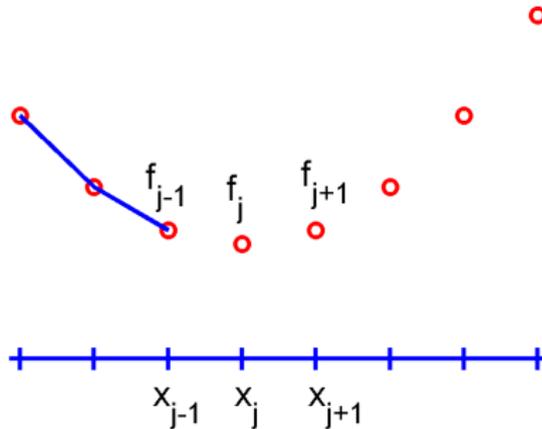
Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

Reconstrucciones a trozos



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

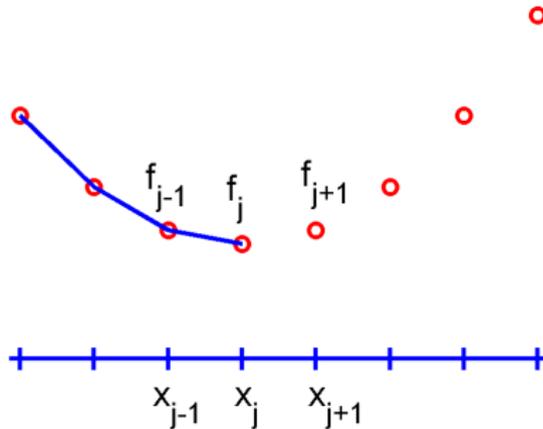
Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

Reconstrucciones a trozos



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

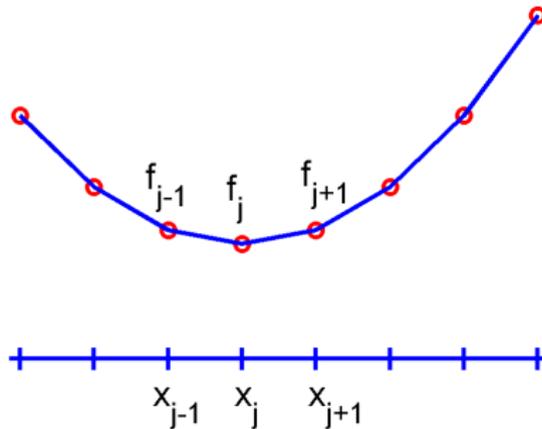
Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

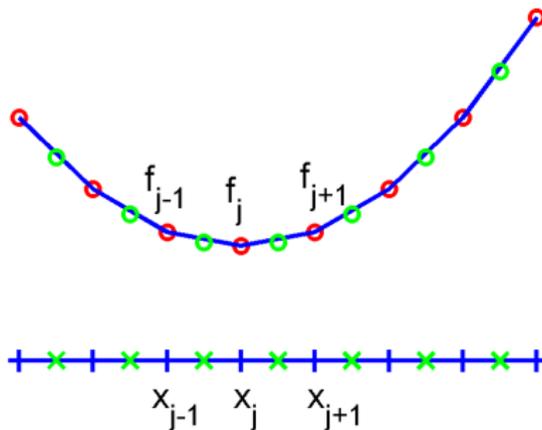
Conclusiones

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

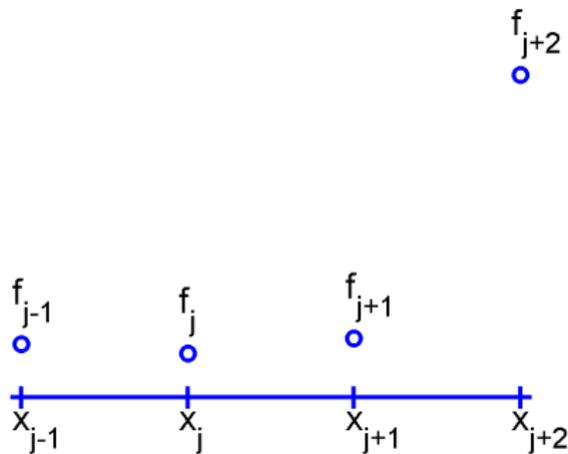
Reconstrucciones a trozos



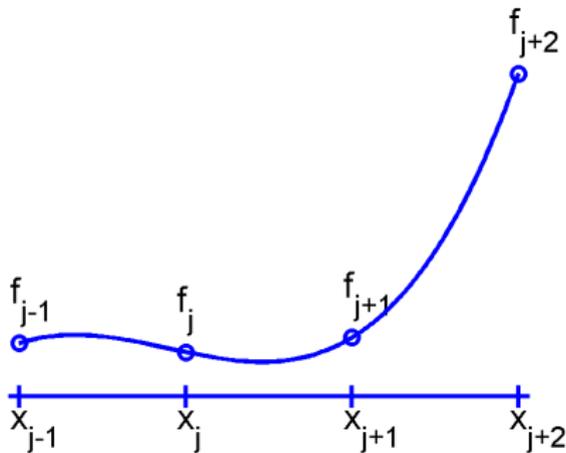
Discretizamos las reconstrucciones



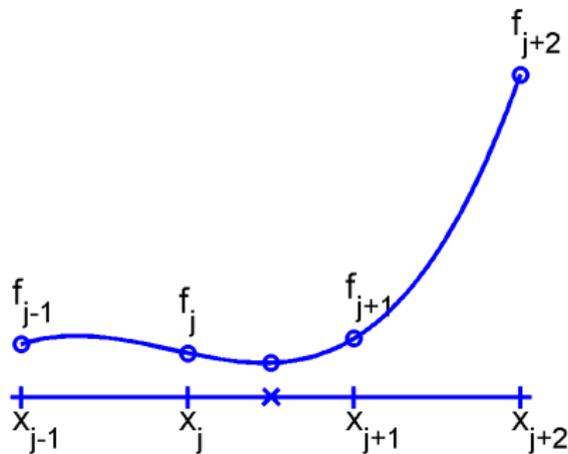
Interpolación lineal de Lagrange



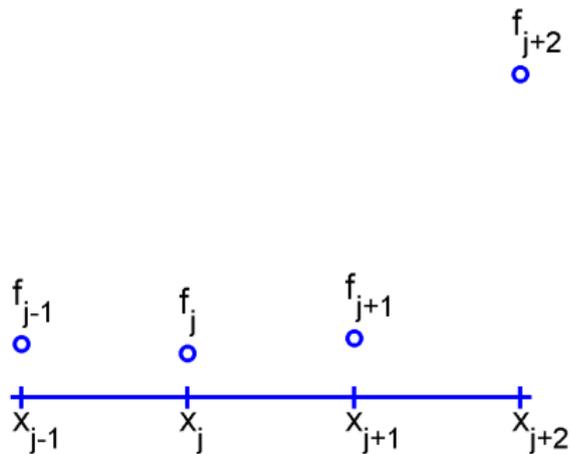
Interpolación lineal de Lagrange



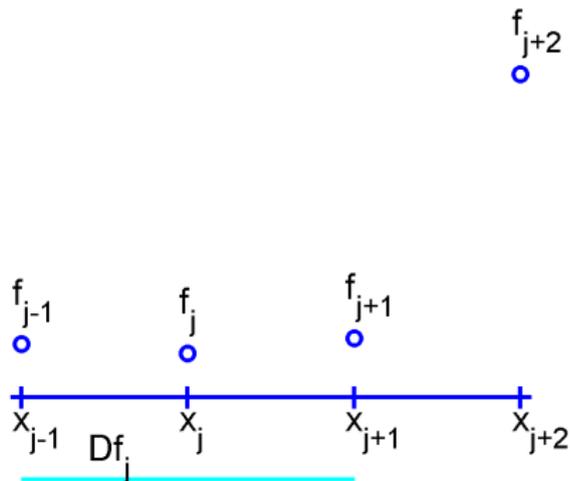
Interpolación lineal de Lagrange



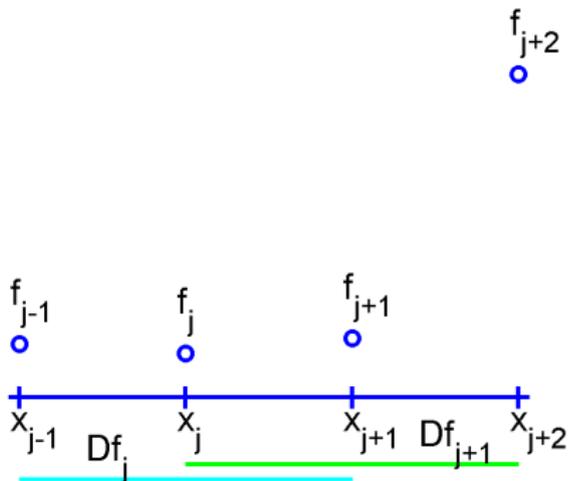
Interpolación no lineal PPH



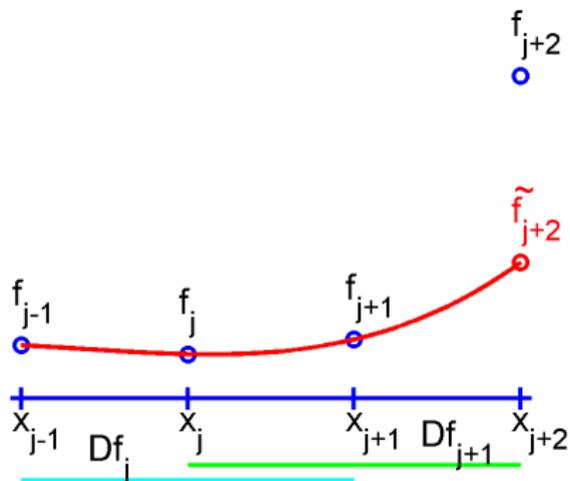
Interpolación no lineal PPH



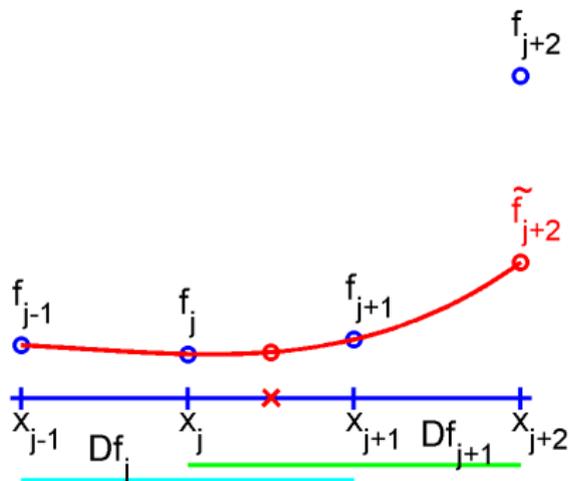
Interpolación no lineal PPH



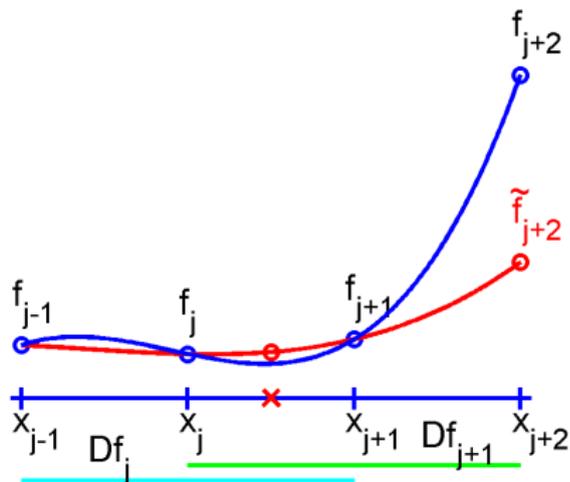
Interpolación no lineal PPH



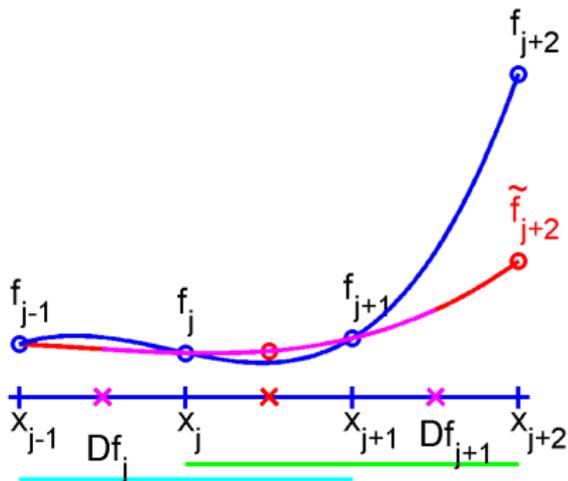
Interpolación no lineal PPH

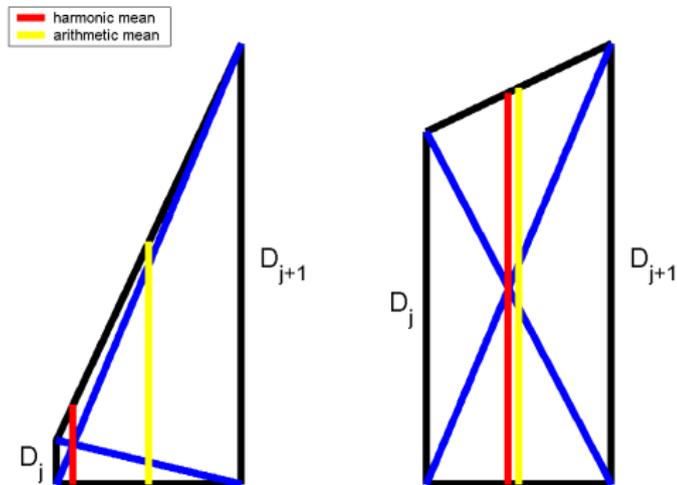


Menos oscilaciones



Preserva la convexidad





Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

Amat, Dadourian, Liandrat (2009)

- Inspirado en Dyn, Floater y Hormann que permite obtener C^2 : 4 puntos Lagrange grado 3 y sustituir el punto $1/2$ por $1/4$ y $3/4$.

$$(Sf)_{2n} = -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2},$$

$$(Sf)_{2n+1} = -\frac{5}{128}f_{n-1} + \frac{35}{128}f_n + \frac{105}{128}f_{n+1} - \frac{7}{128}f_{n+2}.$$

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

1

$$(Sf)_{2n} = \frac{49}{64}f_n + \frac{14}{64}f_{n+1} + \frac{1}{64}f_{n+2} - \frac{7}{64} \frac{(d^2f_n + d^2f_{n+1})}{2},$$

$$(Sf)_{2n+1} = \frac{15}{64}f_n + \frac{50}{64}f_{n+1} - \frac{1}{64}f_{n+2} - \frac{5}{64} \frac{(d^2f_n + d^2f_{n+1})}{2}.$$

2

$$(Sf)_{2n} = -\frac{1}{64}f_{n-1} + \frac{15}{64}f_n + \frac{50}{64}f_{n+1} - \frac{5}{64} \frac{(d^2f_n + d^2f_{n+1})}{2},$$

$$(Sf)_{2n+1} = \frac{1}{64}f_{n-1} + \frac{49}{64}f_n + \frac{14}{64}f_{n+1} - \frac{7}{64} \frac{(d^2f_n + d^2f_{n+1})}{2}.$$

donde (d^2f) está definido por $d^2f_n = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}$.

Reemplazando la media aritmética por la armónica $\text{PPH}(x, y)$.

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

- Si $|d^2 f_n| \geq |d^2 f_{n+1}|$,

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n} = \frac{49}{64} f_n + \frac{14}{64} f_{n+1} + \frac{1}{64} f_{n+2} - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n+1} = \frac{15}{64} f_n + \frac{50}{64} f_{n+1} - \frac{1}{64} f_{n+2} - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}).$$

- Si $|d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|$,

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n} = -\frac{1}{64} f_{n-1} + \frac{15}{64} f_n + \frac{50}{64} f_{n+1} - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n+1} = \frac{1}{64} f_{n-1} + \frac{49}{64} f_n + \frac{14}{64} f_{n+1} - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

Un esquema no lineal C^2 sin fenómeno Gibbs

Definición

$$\text{PPH}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x+y} & \text{si } xy > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

media armónica.

La clave del mejor funcionamiento del esquema se debe a que

$$\frac{x+y}{2} \leq \max\{|x|, |y|\}$$

mientras que

$$\text{PPH}(x, y) \leq 2 \min\{|x|, |y|\}.$$

Las buenas propiedades del esquema

Un esquema de subdivisión S es convergente si

$$\forall f \in I^\infty(\mathbb{Z}), \exists S^\infty f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ tal que } \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |(S^j f)_n - S^\infty f(n2^{-j})| = 0.$$

Teorema

El esquema de subdivisión no lineal S_{PPHA} es convergente con regularidad por lo menos $C^{\beta-}$ con $\beta \geq -\log_2(\frac{7}{16}) > 1$.

Estimaciones numéricas de la regularidad de la función límite

$C^{1+\beta_1-}$ y $C^{2+\beta_2-}$ para S_{PPHA} .

j	5	6	7	8	9	10
β_1	0.9999	0.9999	1	1	1	1
β_2	0.4395	0.7738	1.2615	0.6541	0.4387	0.4388

Las buenas propiedades del esquema

Un esquema de subdivisión convergente es estable si

$$\exists C < +\infty \text{ tal que } \forall f^0, g^0 \in I^\infty(\mathbb{Z}), \quad \|S^\infty f - S^\infty g\|_{L^\infty} \leq C \|f^0 - g^0\|_{I^\infty}$$

Teorema

El esquema S_{PPHA} es estable.

Análisis de la estabilidad en esquemas no lineales

Sea $S_{NL} : I^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow I^\infty(\mathbb{Z})$ un esquema de la forma:

$$\forall f \in I^\infty(\mathbb{Z}), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (S_{NL}f)_n = (Sf)_n + F(\delta f)_n, \quad (1)$$

donde F es un operador no lineal definido en $I^\infty(\mathbb{Z})$, δ un operador lineal y continuo definido en $I^\infty(\mathbb{Z})$ y S un esquema lineal convergente (y por lo tanto estable).

Teorema

Si F, S y δ verifican: $\exists M > 0, c < 1$ tal que $\forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\|F(f) - F(g)\|_\infty \leq M\|f - g\|_\infty, \quad (2)$$

$$\|\delta(S_{NL}f - S_{NL}g)\|_\infty \leq c\|\delta(f - g)\|_\infty, \quad (3)$$

entonces S_{NL} es estable.

Si $|d^2 f_n| \geq |d^2 f_{n+1}|$,

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n} = \frac{3}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n+1} + \frac{1}{64}d^2 f_{n+1} - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n+1} = \frac{1}{4}f_n + \frac{3}{4}f_{n+1} - \frac{1}{64}d^2 f_{n+1} - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

y si $|d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|$,

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n} = \frac{3}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n+1} - \frac{1}{64}d^2 f_n - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n+1} = \frac{1}{4}f_n + \frac{3}{4}f_{n+1} + \frac{1}{64}d^2 f_n - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

Si consideramos la función

$$R(x, y) = \begin{cases} y - \text{PPH}(x, y) & \text{if } |x| \geq |y|, \\ -x + \text{PPH}(x, y) & \text{if } |x| < |y|, \end{cases} \quad (4)$$

entonces podemos escribir F como

$$F(d^2f)_{2n} = \frac{1}{64}R(d^2f_n, d^2f_{n+1}) - \frac{6}{64}\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}), \quad (5)$$

$$F(d^2f)_{2n+1} = -\frac{1}{64}R(d^2f_n, d^2f_{n+1}) - \frac{6}{64}\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}). \quad (6)$$

Proposición

Propiedades de R :

- 1 Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|R(x, y)| \leq \max(x, y)$.
- 2 Para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$|R(x_1, y_1) - R(x_2, y_2)| \leq \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

Por la definición de F y las propiedades de la media armónica se tiene, para toda $f, g \in I^\infty(\mathbb{Z})$, que

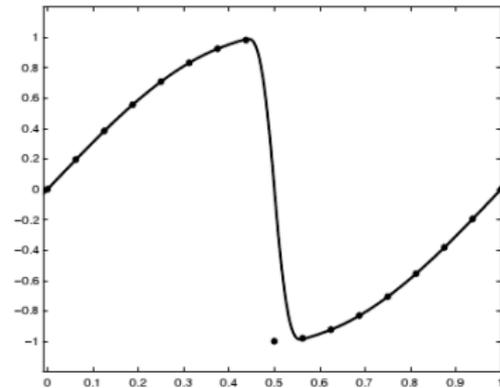
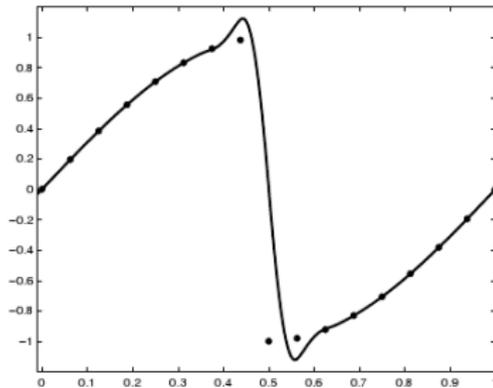
$$\|F(f) - F(g)\|_\infty \leq \frac{1 + 7 \cdot 2}{64} \|f - g\|_\infty.$$

Ahora veamos la contracción de las diferencias segundas. Sean $(f, g) \in (I^\infty(\mathbb{Z}))^2$, estudiamos $64(d^2f^1 - d^2g^1)_k$ para $k = 2n + 1$ (caso 1) o $k = 2n$ (caso 2). Los dos son análogos. Vaemos caso 1:

$$\begin{aligned}
 & 16|(d^2f)_{n+1} - (d^2g)_{n+1}| \\
 & + 6|\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2g_n, d^2g_{n+1})| \\
 & + 6|\text{PPH}(d^2f_{n+1}, d^2f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2g_{n+1}, d^2g_{n+2})| \\
 & + 3|R(d^2f_n, d^2f_{n+1}) - R(d^2g_n, d^2g_{n+1})| \\
 & + |R(d^2f_{n+1}, d^2f_{n+2}) - R(d^2g_{n+1}, d^2g_{n+2})| \\
 \leq & (16 + 12 + 12 + 3 + 1) \|(d^2f) - (d^2g)\|_\infty \\
 = & 44 \|(d^2f) - (d^2g)\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Las buenas propiedades del esquema

El esquema no sufre las oscilaciones del fenómeno Gibbs



Multirresolución de Harten

Un esquema de multirresolución conecta de forma biyectiva una sucesión discreta f^L , donde L representa el nivel de resolución más fino, con una sucesión de la forma

$$\{f^0, d^1, \dots, d^L\},$$

donde f^0 representa una versión de la señal inicial en el nivel de resolución más grosero y cada una de las sucesiones d^k representan los detalles necesarios para recuperar f^k a partir de f^{k-1} . En el caso de algoritmos lineales se trata simplemente de un cambio de base.

El objetivo es tener la misma información pero escrita de otra forma que permita distinguir entre las partes más y menos importantes de la señal.

Más concretamente, por construcción, los detalles serán pequeños en regiones donde se aproximen bien las sucesiones f^k a partir del nivel inferior f^{k-1} .

Esta propiedad es crucial en las aplicaciones.

Se considera un conjunto encajado de mallados en \mathbb{R} :

$$X^k = \{x_j^k\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad x_j^k = jh_k, \quad h_k = 2^{-k},$$

y la discretización puntual

$$\mathcal{D}_k : \begin{cases} C_B(\mathbb{R}) & \rightarrow V^k \\ f & \mapsto f^k = (f_j^k)_{j \in \mathbb{Z}} = (f(x_j^k))_{j \in \mathbb{Z}}, \end{cases} \quad (7)$$

donde V^k es el espacio de sucesiones reales para la resolución dada por X^k y $C_B(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas y acotadas sobre \mathbb{R} .

Un operador reconstrucción \mathcal{R}_k asociado a esta discretización es cualquier inversa por la derecha de \mathcal{D}_k , lo que significa que para toda $f^k \in V^k$, $\mathcal{R}_k f^k \in C_B(\mathbb{R})$ y

$$(\mathcal{R}_k f^k)(x_j^k) = f_j^k = f(x_j^k). \quad (8)$$

Las sucesiones de operadores $\{\mathcal{D}_k\}$ y $\{\mathcal{R}_k\}$ definen un esquema de multirresolución.

El operador de predicción, es decir, $\mathcal{D}_{k+1}\mathcal{R}_k : V^k \rightarrow V^{k+1}$, define un esquema de subdivisión.

Si \mathcal{R}_k es una reconstrucción no lineal, el esquema de subdivisión correspondiente es también no lineal.

La interpolación PPH asociada a conjunto centrado

$f_{j-1}^k, f_j^k, f_{j+1}^k, f_{j+2}^k$ tiene la siguiente forma

$$\tilde{P}_j(x_{j+\frac{1}{2}}^k) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} \text{PPH}(d^2 f_j, d^2 f_{j+1}). \quad (9)$$

Es interesante compararla con la interpolación de Lagrange $P_j(x)$

$$P_j(x_{j+\frac{1}{2}}^k) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} \frac{d^2 f_j + d^2 f_{j+1}}{2}. \quad (10)$$

Teorema

Para cualquier par de elementos $f^L, \tilde{f}^L \in l_\infty(\mathbb{Z})$ y sus descomposiciones PPH: $\{f^0, d^0, \dots, d^{L-1}\}$ y $\{\tilde{f}^0, \tilde{d}^0, \dots, \tilde{d}^{L-1}\}$, se tiene que

$$\|f^L - \tilde{f}^L\|_{l_\infty(\mathbb{Z})} \leq 9 \left(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_{l_\infty(\mathbb{Z})} + \sum_{k=0}^{L-1} \|d^k - \tilde{d}^k\|_{l_\infty(\mathbb{Z})} \right). \quad (11)$$

Teorema

Dados $\{f^0, d^0, \dots, d^{L-1}\}$ y $\{\tilde{f}^0, \tilde{d}^0, \dots, \tilde{d}^{L-1}\}$ dos descomposiciones PPH, correspondientes a $f^L, \tilde{f}^L \in l_\infty(\mathbb{Z})$, se tiene que

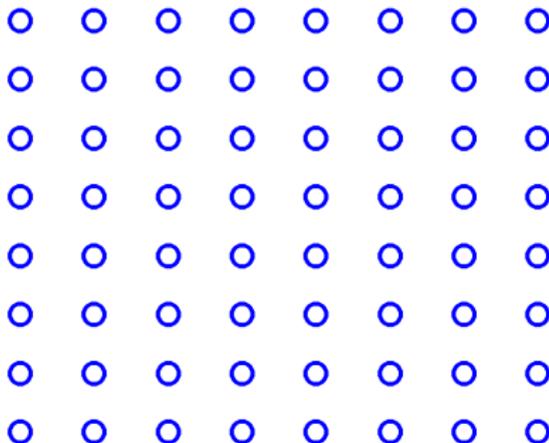
$$\|f^0 - \tilde{f}^0\|_{l_\infty(\mathbb{Z})} \leq \|f^L - \tilde{f}^L\|_{l_\infty(\mathbb{Z})},$$

$$\|d^k - \tilde{d}^k\|_{l_\infty(\mathbb{Z})} \leq 3 \|f^L - \tilde{f}^L\|_{l_\infty(\mathbb{Z})}, \quad \forall 0 \leq k \leq L-1.$$

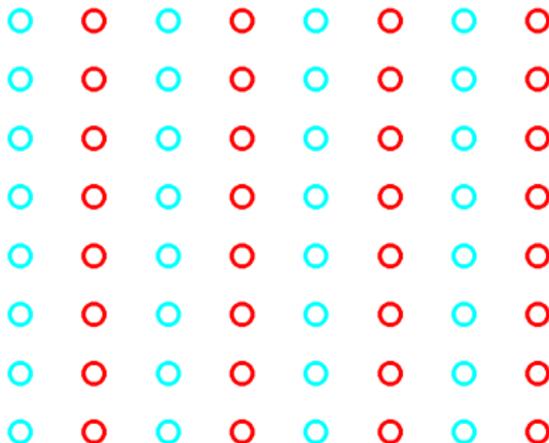
A partir de estas reconstrucciones, usando funciones primitivas, se pueden obtener reconstrucciones y algoritmos de multirresolución para otro tipo de discretizaciones. Por ejemplo, para medias en celda

$$\mathcal{D}_k : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \rightarrow V^k \\ f & \mapsto f^k = (f_j^k)_{j \in \mathbb{Z}} = (\int_{x_{j-1}^k}^{x_j^k} f(x) dx)_{j \in \mathbb{Z}}, \end{cases} \quad (12)$$

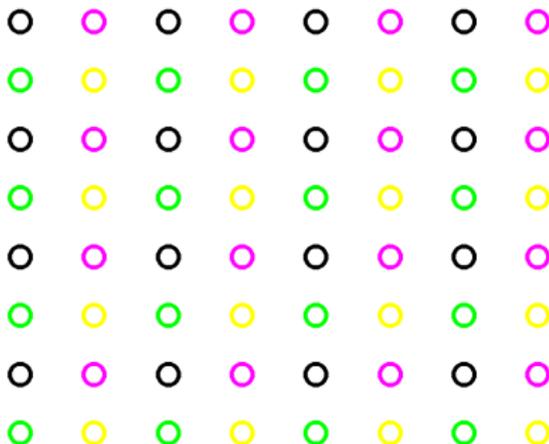
Esquemas de multirresolución



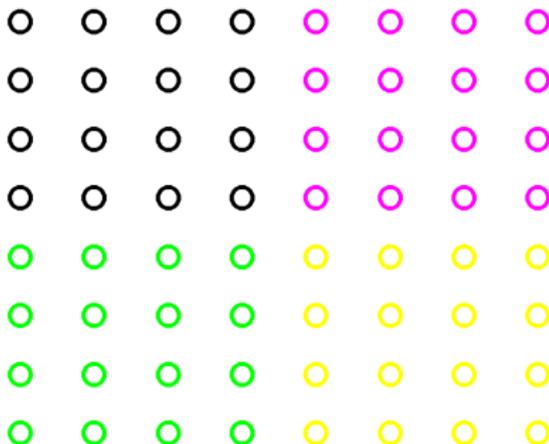
Esquemas de multirresolución



Esquemas de multirresolución



Esquemas de multirresolución



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

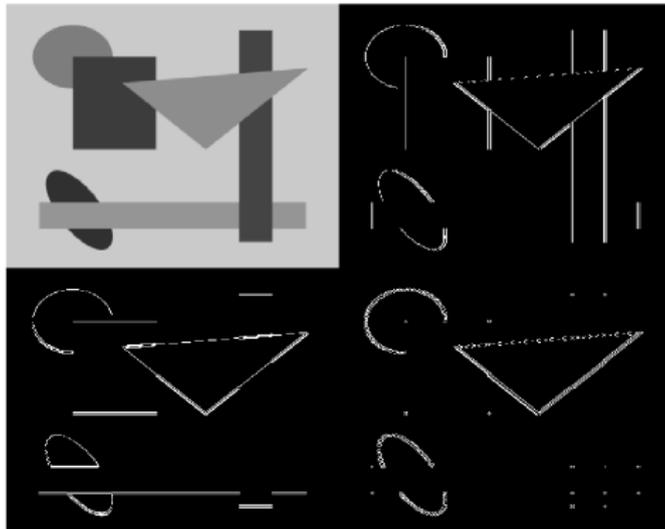
Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Esquemas de multirresolución



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

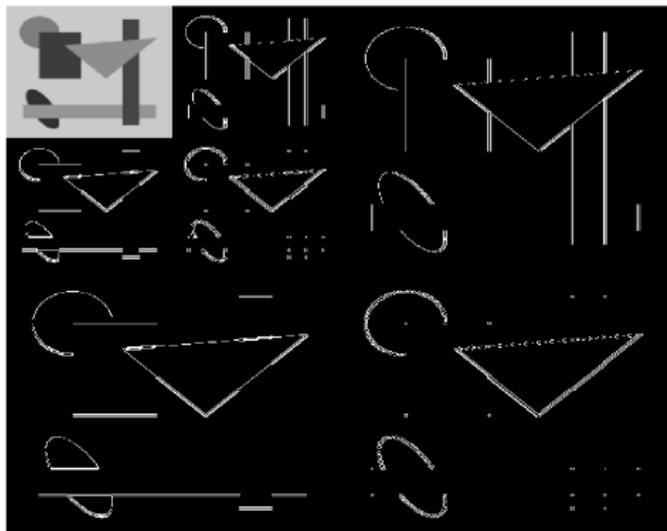
Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Esquemas de multirresolución



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Compresión



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Lineal



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

No lineal



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Eliminación de ruido



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones



Dado un parámetro positivo λ y una imagen con ruido $f(x, y)$, encontrar una función g^* que minimice el funcional

$$\|f - g\|_{L^2(I)}^2 + 2\lambda \|g\|_Y$$

donde

$$\|f - g\|_{L^2(I)}^2 := \int_I |f(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy$$

y $\|\cdot\|_Y$ es una norma en un espacio con "suavidad" Y .

Si queremos utilizar esquemas de multirresolución un candidato es

$$\text{Min}_g \quad \|f - g\|_{L_2(I)}^2 + 2\lambda \|g\|_{B_1^1(L_1(I))}.$$

$$\sum_{k,j} |d_j^k(f) - d_j^k(g)|^2 + 2\lambda \sum_{k,j} |d_j^k(g)|. \quad (13)$$

El problema es separable y el mínimo se obtiene mediante el siguiente truncamiento

$$d_j^k(g) := \begin{cases} (1 - \frac{\lambda}{|d_j^k(f)|})d_j^k(f) & \text{si } |d_j^k(f)| > \lambda, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (14)$$

$$F(c, \lambda) = \begin{cases} (1 - \frac{\lambda}{|c|}) & \text{if } |c| > \lambda, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (15)$$

$$F_2(c, \lambda) = \begin{cases} (1 - \frac{\lambda^2}{c^2}) & \text{if } |c| > \lambda, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (16)$$

$$\sum_{k,j} |d_j^k(f)| \cdot |d_j^k(f) - d_j^k(g)|^2 + 2\lambda^2 \sum_{k,j} |d_j^k(g)| \quad (17)$$

Es posible ver que el esquema de multirresolución no lineal PPH puede discretizar este problema (es el único hasta el momento en la literatura).

Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

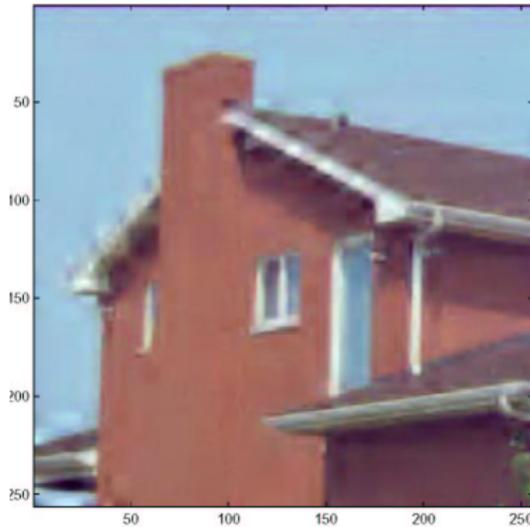
Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

Lineal



Pixar

NURBS

Esquemas de subdivisión

Esquemas de subdivisión no lineales

Interpolación en 1-d

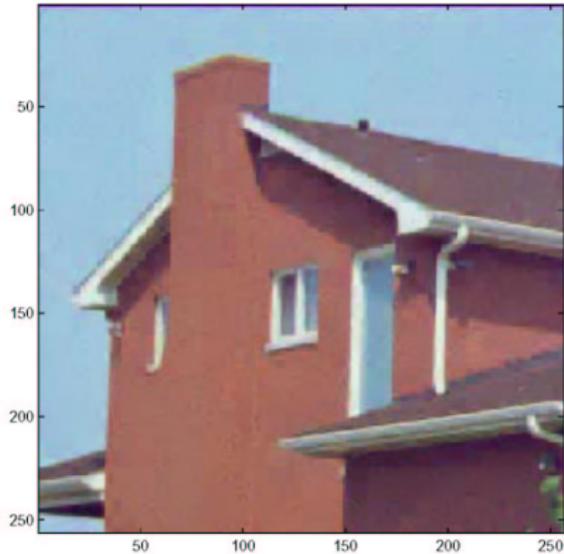
Multirresolución de Harten

Multirresolución en 2-d

Compresión y eliminación de ruido en imágenes

Conclusiones

No lineal



Conclusiones

- Las matemáticas son una herramienta útil para más cosas de las que la sociedad imagina.
- Queda mucho por conocer en matemáticas.
- El progreso de las matemáticas ayuda al progreso de otras ramas y otras ramas motivan el progreso de las matemáticas.
- <http://www.pixar.com/>



Artículos:

- Amat S., Donat R., Liandrat J. and Trillo J.C., (2006). Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing. *Foundations of Computational Mathematics*, **6** 2, 193–225. (JCR: 9/236).
- Amat S. and Liandrat J., (2005). On the stability of the PPH nonlinear multiresolution, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, **18**(2), 198-206. (JCR: 3/236).
- Amat S., Dadourian K. and Liandrat J., (2011). Nonlinear Subdivision Schemes and Associated Multiresolution Transforms, *Adv. Comp. Math.*, 34, no. 3, 253-277. (JCR: 37/236).

- Amat S., Dadourian K. and Liandrat J., (2011). On a nonlinear subdivision scheme avoiding Gibbs oscillations and converging towards C^s functions with $s > 1$, *Math. Comp.*, 80, no. 274, 959-971. (JCR: 43/236).
- Amat S., Dadourian K. and Liandrat J., (2010). On a nonlinear 4-point ternary and interpolatory multiresolution scheme eliminating the Gibbs phenomenon, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, **7**(2), 261-280. (JCR: 139/236).
- Amat S., Ruiz J. and Trillo J.C., (2010). Fast Multiresolution Algorithms and Their Related Variational Problems for Image Denoising, *J. Sci. Comp.*, 43, no. 1, 1-23. (JCR: 53/236).

A la memoria de mi amigo: Sergio Plaza.

