UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Prácticas de Ampliación de Matemáticas.

Arquitectura Técnica

Curso 2008/09.

Profesores:

Juan Vives Valero

Guillermo Salinas Martínez

Práctica 1

Álgebra

1.1. Preliminares.

Cuando se arranca **Mathematica**, aparece una pantalla blanca vacía. En ella podemos escribir aquellas operaciones que queremos que realice. Una vez tecleada la operación, hemos de pulsar las teclas *shift + enter* para obtener el resultado. Por ejemplo, supongamos que queremos hacer la operación 2+2. Teclearemos entonces

$$2 + 2$$

en la pantalla. A continuación pulsamos *shift + enter* y aparecerá lo siguiente en pantalla:

$$\begin{aligned} In[1] &:= 2 + 2 \\ Out[1] &= 4. \end{aligned}$$

Además se pueden realizar las siguiente operaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} x + y &\rightarrow \textit{suma} \\ x - y &\rightarrow \textit{resta} \\ x/y &\rightarrow \textit{división} \\ x\ y\ o\ x * y &\rightarrow \textit{producto} \\ x\hat{}y &\rightarrow \textit{potencia}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. *Realizar las siguientes operaciones con Mathematica:*

a) $3{,}75 + 8{,}987 =$

b) $(2 - 3{,}1)^{23} =$

c) $\frac{2{,}4+3^2}{4*7{,}2^2} =$

d) $2 \times 10^2 + 3 \times 10^{-3} =$

e) $\left(\frac{2{,}3*4}{2-4{,}5^2}\right)^{56} =$

Asociadas a los valores numéricos tenemos las sentencias

$$x//N \text{ o } N[x]$$
$$N[x, n].$$

Las primeras escriben el número x con cinco cifras decimales, mientras que la segunda escribe dicho número con un número n de cifras decimales. Por ejemplo, si queremos calcular el número 2^{100}, haríamos

$$\begin{aligned} In[1] &:= 2\hat{}100 \\ Out[1] &= 1267650600228229401496703205376, \end{aligned}$$

pero tantas cifras parecen innecesarias. Sin embargo, si escribimos

$$\begin{aligned} In[2] &:= 2\hat{}100\ //N \\ Out[2] &= 1{,}26765 \times 10^{30}. \end{aligned}$$

Asímismo, si escribimos

$$In[3] := 1/3 + 2/7$$

el resultado que nos proporcionará Mathematica será

$$Out[3] = \frac{13}{21}.$$

Si queremos que salgan los números con sus correspondientes cifras decimales debemos escribir

$$\begin{aligned} In[4] &:= 1/3 + 2/7\ //N \\ Out[5] &= 0{,}619048 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} In[6] &:= 1./3 + 2/7 \\ Out[6] &= 0{,}619048. \end{aligned}$$

1.2. Funciones matemáticas de interés.

Las principales funciones matemáticas elementales se teclean en Mathematica del siguiente modo:

- Sqrt[x] = $\sqrt{x}$
- Exp[x] = e^x
- Log[x] = $\ln x$
- Log[b, x] = $\log_b x$
- Sin[x] = $\operatorname{sen} x$
- Cos[x] = $\cos x$
- Tan[x] = $\tan x$
- ArcSin[x] = $\operatorname{arc\,sen} x$
- ArcCos[x] = $\operatorname{arc\,cos} x$
- ArcTan[x] = $\arctan x$
- Sinh[x] = $\operatorname{senh} x$
- Cosh[x] = $\cosh x$
- Tanh[x] = $\tanh x$
- ArcSinh[x] = $\operatorname{argsenh} x$
- ArcCosh[x] = $\operatorname{argcosh} x$
- ArcTanh[x] = $\operatorname{argtanh} x$
- $n!$ = *factorial de* n
- Abs[x] = $|x|$
- Floor[x] = *parte entera de* x
- FactorInteger[n] = *factores primos de* n.
- Re[z] = *parte real de* z
- Im[z] = *parte imaginaria de* z
- Conjugate[z] = *conjugado de* z
- Arg[z] = *argumento de* z

Así, si escribimos

$$\begin{aligned} In[1] &:= \text{Sqrt[16]} \\ Out[1] &= 4 \\ In[2] &:= \text{Sqrt[2]} \\ Out[2] &= \sqrt{2} \\ In[3] &:= \text{Sqrt[2] //}N \\ Out[3] &= 1{,}41421 \\ In[4] &:= \text{N[Sqrt[7], 10]} \\ Out[4] &= 2{,}6457513111. \end{aligned}$$

Las constantes matemáticas de interés son:

$$\begin{aligned} \text{Pi} &= \pi \simeq 3{,}14159 \\ \text{E} &= e \simeq 2{,}71828 \\ \text{Infinity} &= \infty \\ \text{I} &= i = \sqrt{-1} \\ \text{Degree} &= \textit{conversión de grados a radianes} \end{aligned}$$

Por ejemplo, para calcular el seno de 20 grados escribiríamos

$$\begin{aligned} In[1] &:= \text{Sin[20 Degree] //N} \\ Out[1] &= 0{,}34202. \end{aligned}$$

Si quisiéramos mayor precisión en las anteriores constantes, debemos escribir

$$\begin{aligned} In[2] &:= \text{N[Pi, 10]} \\ Out[2] &= 3{,}1415926536, \end{aligned}$$

que nos proporciona un valor del número π con diez cifras decimales.

Ejercicio 1.2. *Calcular el valor numérico de:*

a) $\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 15^\circ =$

b) $\log_2 256 =$

c) $\left|\operatorname{arc\,sen} 0{,}98 + \frac{\log 2}{\sqrt{2}}\right| =$

d) $e^{10!} =$

e) $\sqrt{\ln 34 + e^{12}} =$

Ejercicio 1.3. *Hacer la descomposición en factores primos de los números:*

a) 456

b) 98609

c) 235970

d) 98630344344

Ejercicio 1.4. *Dado el complejo* $(3+i)\cdot(-4+6i)\cdot(2-3i)$ *calcular*

1. *Partes real e imaginaria:*
2. *Módulo y argumento:*

1.3. Aprovechando cálculos anteriores.

A veces, es posible que tengamos que hacer una sucesión de cálculos consecutivos de manera que cada nueva operación se basa en la anterior. Parece necesaria entonces una sentencia que nos remita a resultados anteriores. Dicha sentencia es %. Por ejemplo, si queremos calcular $\cos(\sin 20°)$ tendríamos que calcular primero $\sin 20°$, para después calcular el coseno de dicha cantidad. Esta operación podríamos hacerla del modo siguiente:

$$\begin{aligned} In[1] &:= \text{Sin[20 Degree] //N} \\ Out[1] &= 0{,}34202 \\ In[2] &:= \text{Cos[\%]} \\ Out[2] &= ?. \end{aligned}$$

Para remitirnos a un resultado obtenido dos pasos antes debemos escribir % %, y para resultados obtenidos k pasos antes escribiremos k símbolos %. Para remitirnos a un resultado obtenido en la salida n podemos también escribir %n.

1.4. Definición de variables.

Supongamos que tenemos que hacer una serie de cálculos en los cuales interviene repetidamente una constante, como por ejemplo la constante de la gravitación universal, o al estudiar valores particulares de la función $f(x) = (1{,}45)^x$. Se hace necesario entonces el definir variables con estos valores a la hora de realizar cálculos. Las variables pueden ser designadas por letras o por sucesiones de letras.

Veamos cómo se hace esto con Mathematica. Supongamos que queremos definir la constante de la gravitación universal $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ con Mathematica. Entonces deberíamos hacer

$$\begin{aligned} In[1] &:= G = 6{,}67 \times 10^{-11} \\ Out[1] &= 6{,}67 \times 10^{-11} \end{aligned}$$

Si ahora tenemos dos cuerpos de masa $3Kg$ separados a una distancia de $10m$. la fuerza con la que se atraen es

$$\begin{aligned} In[2] &:= G * 3\hat{}2/100 \\ Out[2] &= ?. \end{aligned}$$

Para desposeer a G de su valor debemos teclear

$$In[3] := G = .$$

o

$$In[4] := \text{Clear}[G].$$

A la hora de trabajar con variables en Mathematica, hemos de tener en cuenta las siguientes reglas. Si x e y son dos variables que hemos definido

1. $x\ y$ se leerá x veces y o x por y.
2. xy será una nueva variable.
3. $5x$ se leerá 5 veces x.
4. $x\hat{}2y$ es $(x\hat{}2)\ y$ y no $x\hat{}(2y)$.

Por otra parte, si en una misma línea queremos definir varias variables, o escribir varias expresiones debemos separar estas con ";". Por ejemplo

$$\begin{aligned} In[1] &:= x = 1; y = 2; z = x + y \\ Out[1] &= 3. \end{aligned}$$

Si al final de la última expresión ponemos también ";" la operación no proporciona ninguna salida, es decir la expresión

$$In[2] := x = 1; y = 2; z = x + y;$$

no proporciona a continuación un $Out[2]$, al pulsar shift+enter.

1.5. Definición de funciones.

Vamos a definir la función $f(x) = 3x^2 - x + 2$, para ello escribimos:

$$In[1] := f[x_] := 3x\hat{}2 - x + 2$$

El símbolo "_" sólo se usa en el momento de definir una función para avisar al Kernel que lo que antecede al símbolo es el nombre de una variable de la función.

De esta forma si queremos saber el valor de $f(3)$, escribimos:

$$\begin{aligned} In[2] &:= f[3] \\ Out[2] &= 26. \end{aligned}$$

También podemos obtenerlo de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} In[3] &:= f[x]/.\{x \to 3\} \\ Out[3] &= 26. \end{aligned}$$

La rutina *expresión* $/.\{x \to a\}$ sustituye x por a en *expresión*.

Una rutina para construir o definir una función sería:
nombrefunción$[x_, y_, z_, \ldots]$**:= expresión dependiendo de las variables**

Hay que hacer notar que para definir una función se hace una asignación diferida ":=" y no directa "=", pues sino de esta última forma se define una constante.

Mathematica guarda todas las variables y funciones definidas en una misma sesión, por lo que al definir nuevas funciones o variables debemos darles nombres que estemos seguros que no hemos utilizado o borrarlas antes.

1.6. Manipulación de polinomios y expresiones trigonométricas

Mathematica dispone de comandos para manipular algebraicamente expresiones de la forma: polinomios en una y varias variables, fracciones cuyo numerador y denominador son polinomios y por último expresiones trigonométricas.

Para los dos primeros tipos, si tenemos una "expresión", podemos usar:

Expand[expresión]	multiplica y realiza potencias
ExpandAll[expresión]	id. todas las posibles
Factor[expresión]	reducción a factores irreducibles
Together[expresión]	reduce fracciones a común denominador
Apart[expresión]	reduce frac. a suma de frac. simples
Cancel[expresión]	cancela denominadores comunes en fracciones
Simplify[expresión]	simplifica

Ejercicio 1.5. *Con la expresión* $\dfrac{(x^2-1)(2+x)}{(x-3)^2(x+1)}$ *usar las ordenes anteriores.*

1. ***Expand***
2. ***ExpandAll***
3. ***Apart***
4. ***Cancel***
5. ***Simplify***
6. *Calcular el valor de la expresión en* $x = 5$

Ejercicio 1.6. *Dado el polinomio* $p(x) = x^5 - 14x^3 - 2x^4 + 34x^2 - 15x + 36$

1. *Factorizarlo:*
2. *Encontrar las raíces:*
3. *Calcular* $p(8)$:

Para las expresiones trigonométricas tenemos los comandos:

TrigExpand[expresión]	desarrolla expresiones en sumas
TrigFactor[expresión]	transforma expresiones en productos
TrigReduce[expresión]	reduce expr. usando múltiplos de los ángulos iniciales

Ejercicio 1.7. *Manipular la expresión* $\cos 2x \tan x$ *con las funciones anteriores*

1. ***TrigExpand***
2. ***TrigFactor***
3. ***TrigReduce***
4. *Calcular la expresión trigonométrica en* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *y* $x = 60^o$

Ejercicio 1.8. *Dadas las funciones* $f(x) = x^3 + 4x$ *y* $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ *calcular las composiciones* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *y los valores* $f(g(3)), g(f(3))$

1.7. Resolución numérica de ecuaciones.

Supongamos que queremos resolver la ecuación polinómica $x^2 + 2x - 7 = 0$. En primer lugar, en Mathematica dicha expresión debe escribirse $x\hat{}2+2\ x-7 == 0$, es decir, poniendo dos signos igual en vez de uno. Una vez que sabemos como escribir ecuaciones, el comando para resolverlas en **Mathematica** es *Solve*[ ]. Así, para resolver la ecuación anterior escribiremos

$$\begin{aligned} In[1] &:= \text{Solve}[x\hat{}2 + 2\ x - 7 == 0, x] \\ Out[1] &= \{\{x \to -1 - 2\sqrt{2}\}, \{x \to -1 + 2\sqrt{2}\}\}. \end{aligned}$$

Utilizando el comando $N[\ ]$ obtenemos soluciones numéricas aproximadas con cinco cifras decimales del siguiente modo

$$\begin{aligned} In[2] &:= N[\%] \\ Out[2] &= \{\{x \to -3{,}82843\}, \{x \to 1{,}82843\}\} \end{aligned}$$

y utilizando el comando $N[\ ,k]$ obtendríamos k cifras decimales. Nótese que estas cifras decimales se obtienen a partir de las expresiones exactas sencillas $-1-2\sqrt{2}$ y $-1+2\sqrt{2}$.

Con este comando, también se pueden resolver sistemas de ecuaciones. Para ello basta con añadir ecuaciones separándolas con una coma. Por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} x+y & =2 \\ x-3y+z & =3 \\ x-y+z & =0 \end{cases}$$

puede resolverse del siguiente modo

$$\begin{aligned} In[5] &:= \text{Solve}[\{x+y==2, x-3y+z==3, x-y+z==0\}, \{x,y,z\}] \\ Out[5] &= \{\{x \to \frac{7}{2}, y \to -\frac{3}{2}, z \to -5\}\}. \end{aligned}$$

Existen otros comandos para resolver ecuaciones numéricamente, incluso cuando éstas no puedan ser expresadas en términos sencillos, como pasa con la solución de la ecuación $e^{-x}=x$. Estos comandos son $NSolve[\ ]$ y $FindRoot[\ ]$. Si lo que queremos es resolver una ecuación del tipo $P(x)=0$, cuando $P(x)$ es un polinomio, el modo de empleo del comando es el siguiente:

$$\begin{aligned} In[3] &:= \text{NSolve}[x\hat{}5+x+1==0, x] \\ Out[3] &= \{\{x \to -0{,}754878\}, \{x \to -0{,}5-0{,}866025\ i\}, \\ &\quad \{x \to -0{,}5+0{,}866025\ i\}, \{x \to 0{,}877439-0{,}744862\ i\}, \\ &\quad \{x \to 0{,}877439-0{,}744862\ i\}\}. \end{aligned}$$

Si es una ecuación no polinómica, **Mathematica** utiliza métodos iterativos de resolución numérica de ecuaciones como el algoritmo de Newton. Para usar estos métodos hemos de proporcionar un punto inicial para empezar a efectuar iteraciones. La forma de resolver la ecuación $e^{-x}=x$ con Mathematica es entonces la siguiente:

$$\begin{aligned} In[4] &:= \text{FindRoot}[\text{Exp}[-x]==x, \{x, 0{,}5\}] \\ Out[4] &= ?, \end{aligned}$$

donde 0.5 va a ser el punto en el que iniciemos las iteraciones.

Con estos dos comandos, también se pueden resolver sistemas de ecuaciones. Para ello basta con añadir ecuaciones separándolas con una coma. Por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} x+y & =2 \\ x-3y+z & =3 \\ x-y+z & =0 \end{cases}$$

puede resolverse del siguiente modo

$$\begin{aligned} In[5] &:= \text{NSolve}[\{x+y==2, x-3y+z==3, x-y+z==0\}, \{x,y,z\}] \\ Out[5] &= \{\{x \to 3{,}5, y \to -1{,}5, z \to -5.\}\}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9. *Calcular las raíces de los siguientes polinomios, dando el resultado exacto si lo hubiere, y un resultado aproximado.*

a) $x^3 + 3x^2 - x - 1$.

b) $x^{10} - 1$.

c) $5x^4 - x^2 + x - 1$.

d) $x^5 - x^3 + 1$.

Ejercicio 1.10. *Resolver las siguientes ecuaciones numéricamente:*

a) $\cos x = \ln x$.

b) $e^{-x} = x^2$.

Ejercicio 1.11. *Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:*

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ x + y &= 0{,}5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - z &= 1 \\ x - y &= 0 \\ 2x + z &= 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y &= 0 \\ 2x + 6y &= 1 \end{cases}$

1.8. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La solución de sistemas de ecuaciones lineales de grandes dimensiones se hace necesaria en física e ingeniería. Los dos métodos que se han visto en clase nos permiten calcular la solución a mano. El método de Gauss es fácilmente implementable en un ordenador y aquellos que conozcáis un lenguaje de programación como C o Pascal os podéis entretener en realizarlo.

Mathematica lleva el algoritmo de la resolución incorporado y el hecho novedoso es que podemos introducir sistemas como:

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + z &= 1 \\ x + \alpha\beta y + z &= \beta \\ x + \beta y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

y él nos dará las soluciones. El problema es que en las soluciones que nos da, el programa supone implícitamente que el sistema es compatible y determinado. Es nuestra tarea decidir cuando esas soluciones tienen sentido y cuando no lo tienen.

Introducimos la matriz asociada al sistema y la denotamos por A y la matriz de los términos independientes.

$$\{\{\alpha, \beta, 1\}, \{1, \alpha\beta, 1\}, \{1, \beta, \alpha\}\}$$

$$b = \{1, \beta, 1\}$$

Seguidamente se utiliza el comando LinearSolve[A,b] que da la solución del sistema de ecuaciones $Ax = b$. Evidentemente es nuestra tarea la de discernir qué sucede cuando $\alpha = -2$, $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ ya que los denominadores de la solución obtenida con el programa carece de sentido.

Ejercicio 1.12. *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

a) $\begin{cases} 4x - 3y &= 10 \\ 8x + y &= 10 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 4y + z &= 8 \\ 3x - 12y + 5z &= 26 \\ 2x - 9y - z &= 14 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x - 3y + z + 2t &= 2 \\ x - 2y + 2z + 4t &= -1 \\ 2x - 8y - t &= 3 \\ 3x - 9y + 4z &= 7 \end{cases}$

Ejercicio 1.13. *Resolver, cuando sea posible, el sistema*

$$\begin{cases} kx + y + z + t &= k \\ x + ky + z + t &= k \\ x + y + kz + t &= k \\ x + y + z + kt &= k \end{cases}$$

Práctica 2

Cálculo

2.1. Calculando límites de sucesiones y series.

Para el cálculo de límites de sucesiones, también los funcionales, usaremos la sentencia

$$\textbf{Limit}[a_n, n \to \infty]$$

Para calcular sumas de series la orden

$$\textbf{Sum}[a_n, \{n, \text{mín}, \text{máx}\}]$$

calcula la suma de la serie de término general a_n que depende del índice n desde mín hasta máx . Más fácil resulta usando el menú que aparece con **File Palettes BasicInput** y eligiendo $\sum, \to, \infty, etc.$

Para el cálculo de límites de funciones, el comando que se utiliza es el mismo que para sucesiones

$$\textbf{Limit}[f(x), x \to a]$$

Ejercicio 2.1. *Calcular los límites de las sucesiones*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n}{n-1}\right]^{-n}$

Ejercicio 2.2. *Calcular la suma de las series*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+2)!}$

Ejercicio 2.3. *Calcular los límites funcionales*

1. $\lim_{x\to\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$

2.2. Derivadas de funciones.

Supongamos que tenemos una función de una variable $f(x)$ o de varias variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ a la que queremos calcular su derivada o derivada parcial respecto de alguna de sus variables. El comando que realiza ese cálculo con **Matematica** es $D[f, x]$ o $D[f, x_i]$. Por ejemplo si queremos calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ escribiremos

$$\begin{aligned} In[1] &:= D[\mathrm{Sin}[x], x] \\ Out[1] &= \mathrm{Cos}[x], \end{aligned}$$

especificando tanto la función como la variable respecto de la cual vamos a derivar. Así para calcular la derivada parcial con respecto a la variable y de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ debemos escribir

$$\begin{aligned} In[2] &:= D[\mathrm{Sin}[x+y], y] \\ Out[2] &= \mathrm{Cos}[x+y]. \end{aligned}$$

Para calcular la derivada n–ésima de $f(x)$, hemos de proceder con el comando $D[f, \{x, n\}]$. Así la segunda derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se calcula

$$\begin{aligned} In[3] &:= D[\mathrm{Sin}[x], \{x, 2\}] \\ Out[3] &= -\mathrm{Sin}[x] \end{aligned}$$

y $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ sería

$$\begin{aligned} In[4] &:= D[\mathrm{Sin}[x+y], \{y, 3\}] \\ Out[4] &= -\mathrm{Cos}[x+y]. \end{aligned}$$

Si ahora queremos calcular derivadas parciales cambiando la variable con la que derivamos. Por ejemplo calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ debemos escribir

$$\begin{aligned} In[5] &:= D[\text{Sin}[x+y], x, y] \\ Out[5] &= -\text{Sin}[x+y]. \end{aligned}$$

Para calcular la función derivada en un punto se sustituye, al final de la exprexión, la variable por el valor:

$$\begin{aligned} In[6] &:= D[\text{Sin}[x], x]/.x \to 0 \\ Out[6] &= 1 \\ In[7] &:= D[\text{Sin}[x+y], y]/.\{x \to 0, y \to 0\} \\ Out[7] &= 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.4. *Calcula las derivadas de las siguientes funciones, intenta dar el resultado de manera simplificada usando el comando* Simplify[ ].

a) $f(x) = \log(\text{sen}^5 x)$.

b) $f(x) = \frac{\log(\cos x)\arcsin x}{e^x \log_4(x^4+10)}$.

c) $f(x) = 1 + \left(\frac{2x+e^x}{x^2+\tan\sqrt{x}}\right)$.

Ejercicio 2.5. *Calcula la derivada cuarta y sexta de cada una de las funciones del ejercicio anterior.*

Ejercicio 2.6. *Calcula* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ *y* $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ *de las siguientes funciones:*

a) $f(x,y) = 3\cos(\text{sen}\, x - y)$.

b) $f(x,y) = 2\,\text{arc sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

c) $f(x,y) = \frac{1+\log\left(x+e^{2y}\right)}{\sqrt{x^2-\tan xy}}$.

Ejercicio 2.7. *Crear una función de dos variables, cuyos argumentos sean una función* f *y un punto* a*, de tal forma que calcule* $f'(a)$.

2.3. Desarrollos en serie

La orden

$$\mathbf{Series}[f(x), \{x, x_0, n\}]$$

proporciona el desarrollo de Taylor de la función $f(x)$ en x_0 de orden n, con el correspondiente error. Si no deseamos que este aparezca y sólo queremos el polinomio de Taylor de grado n emplearemos la orden

$$\mathbf{Normal}[\mathbf{Series}[f(x), \{x, x_0, n\}]]$$

Ejercicio 2.8. *Escribir el polinomio* $p(x) = x^4 + 5x^3 - 2x + 1$ *en las potencias crecientes de* $(x - 2)$

Ejercicio 2.9. *Desarrollo de MacLaurin de* $f(x) = \sqrt{x+1}$

2.4. Cálculo de primitivas e integrales definidas.

Mathematica también posee sentencias para calcular primitivas de funciones de una variable. El comando que se utiliza para calcular la primitiva de una función $f(x)$ es $Integrate[f, x]$. Por ejemplo, para calcular una primitiva de $f(x) = \operatorname{sen} x$ procedemos del siguiente modo.

$$\begin{aligned} In[1] &:= \text{Integrate}[\text{Sin}[x], x] \\ Out[1] &= -\text{Cos}[x]. \end{aligned}$$

Si lo que pretendemos es calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, el comando que debemos usar es $Integrate[f, \{x, a, b\}]$. Entonces $\int_0^1 xdx$ se calcularía del modo siguiente.

$$\begin{aligned} In[2] &:= \text{Integrate}[x, \{x, 0, 1\}] \\ Out[2] &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si en el ejemplo anterior hubiésemos querido obtener un valor numérico en términos de cifras decimales, hubiéramos debido utilizar el siguiente comando $NIntegrate[f, \{x, a, b\}]$ para obtener:

$$\begin{aligned} In[3] &:= \text{NIntegrate}[x, \{x, 0, 1\}] \\ Out[3] &= 0{,}50000 \end{aligned}$$

El mismo resultado se obtiene del siguiente modo:

$$\begin{aligned} In[4] &:= N[\,\%2] \\ Out[3] &= 0{,}50000, \end{aligned}$$

y con 7 cifras decimales

$$\begin{aligned} In[4] &:= N[\,\%2, 7] \\ Out[3] &= 0{,}5000000. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.10. *Calcular las primitivas de las siguientes funciones:*

a) $f\,(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(2x)\cos(3x)\tan(4x)$

b) $f\,(x) = \frac{x+x^2}{1+x^{10}}$

c) $f\,(x) = e^{3x}\cos x$

d) $f\,(x) = \mathrm{senh}(x)\cosh(2x)\,\mathrm{senh}(3x)$.

Ejercicio 2.11. *Calcular para las funciones del ejercicio 2.10 la integral* $\int_0^1 f\,(x)\,dx$ *dando el resultado exacto y con cifras decimales.*

Ejercicio 2.12. *Calcular las integrales*

1. $\int x^3 \cdot \cos\,(2x) \cdot dx$
2. $\int \dfrac{3x^2+2x+4}{x^3+x^2+x+1} \cdot dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,x+\cos x} \cdot dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x+\cos x} \cdot dx$

Ejercicio 2.13. *Crear una función de dos variables, cuyos argumentos sean una función* f *y los extremos de un intervalo* a *y* b*, de tal forma que calcule* $\int_a^b f\,(x)\,dx$ *en valor numérico.*

2.5. Representación gráfica de funciones, curvas y superficies.

Mathematica permite hacer representaciones gráficas de funciones de una y varias variables. Para ello hemos de darle tanto la función, como el dominio de definición de ésta.

Para representar funciones reales de variable real, tenemos el comando $Plot[\ ]$. Así, para representar la función $f\,(x) = \sin x$ en el dominio $[0, 2\pi]$ escribimos

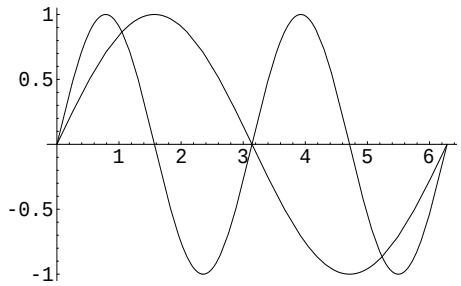


Figura 2.1: gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sin(2x)$

Si queremos representar varias funciones a la vez, hemos de escribir

$$In[2] := \text{Plot}[\{\text{Sin}[x], \text{Sin}[2x]\}, \{x, 0, 2Pi\}],$$

expresión que hará una representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$.

La representación gráfica de funciones de dos variables se hace mediante el comando $Plot3D[\,]$. Por ejemplo, si queremos representar la función $f\,(x, y) = \sin\,(xy)$ en el dominio $[0, 3] \times [0, 3]$ hemos de escribir

$$In[3] := \text{Plot3D}[\text{Sin}[x\ y], \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}].$$

El comando empleado para representar curvas parametrizadas en el plano es $ParametricPlot[\,]$. Por ejemplo, para representar la curva

$$\begin{cases} x\,(t) = \sin t, \\ y\,(t) = \sin 2t, \end{cases}$$

en el dominio $[0, 2\pi]$ debemos teclear

$$In[4] := \text{ParametricPlot}[\{\text{Sin}[t], \text{Sin}[2t]\}, \{t, 0, 2Pi\}].$$

Para representar curvas y superficies en el espacio disponemos de la sentencia

$$ParametricPlot3D[\,].$$

Por ejemplo, para representar la curva $\begin{cases} x\,(t) = \sin t \\ y\,(t) = \cos t \\ z\,(t) = t/3 \end{cases}$ en el dominio $[0, 15]$ hemos de escribir:

$$In[5] := \text{ParametricPlot3D}[\{\text{Sin}[t], \text{Cos}[t], t/3\}, \{t, 0, 15\}].$$

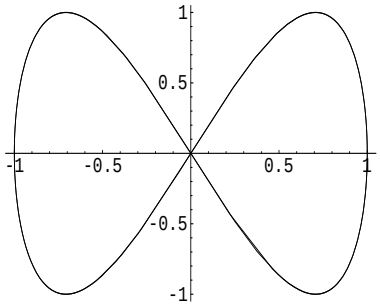


Figura 2.2: curva $\beta(t) = (\sin t, \sin 2t)$

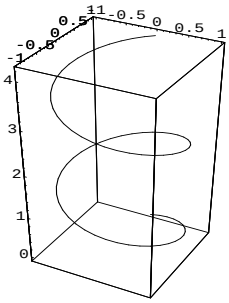


Figura 2.3: curva $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t/3)$

Para representar la superficie:

$$\begin{cases} x\,(u,v) = u, \\ y\,(u,v) = v, \\ z\,(u,v) = \sin\,(uv)\,, \end{cases}$$

en el dominio $[0,3] \times [0,3]$ debemos escribir:

$$In[6] := \text{ParametricPlot3D}[\{u, v, \text{Sin}[u\ v]\}, \{u, 0, 3\}, \{v, 0, 3\}].$$

Para representar de nuevo una gráfica que ya hemos representado con anterioridad tenemos el comando $Show[\ ]$. Así, si escribimos

$$In[7] := \text{Show}[\,\%2],$$

obtenemos una nueva representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$, y con

$$In[8] := \text{Show}[\,\%\,\%],$$

volvemos a obtener una representación de la superficie

$$\begin{cases} x\,(u,v) = u, \\ y\,(u,v) = v, \\ z\,(u,v) = \sin\,(uv)\,, \end{cases}$$

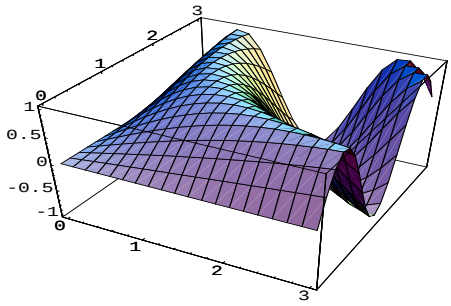


Figura 2.4: superficie $x(u,v) = (u, v, \sin(uv))$

en el dominio $[0,3] \times [0,3]$.

Si entre la representación de ambas curvas hemos realizado varios cálculos, se dispone de un método quizás más efectivo para la representación de funciones en un mismo gráfico. Consiste en definir como una constante cada una de las gráficas. Veámoslo con un ejemplo en el que representamos en una misma gráfica la función $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x+2}$ y su derivada.

In[1]:= $f[x_] := (x^2 + 3x - 2)/(x + 2);$

In[2]:= $g[x_] := D[f[xx], xx]/.xx \to x;$

In[3]:= $Plot[f[x], \{x, -5, 5\}]$

Out[3]:= (figura 5 izquierda)

In[4]:= $Plot[g[x], \{x, -5, 5\}, PlotStyle \to \{RGBColor[0, 1, 0]\}];$

Out[4]:= (figura 5 deerecha)

In[5]:= graficaf:=%3; graficaderivadaf:=%4;

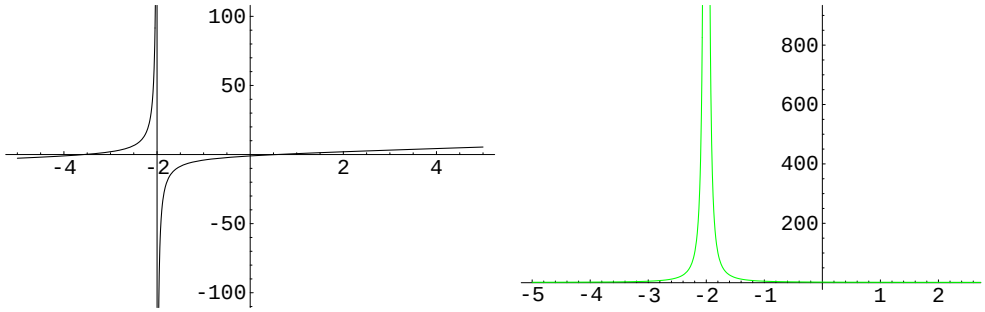


Figura 2.5: Out[3] y Out[4]

In[6]:= Show[graficaf,graficaderivadaf];

Out[6]:= (figura 6)

Figura 2.6: Out[6]

Ejercicio 2.14. *Representar las funciones elementales*

1. $f(x) = x^2, g(x) = x^3, h(x) = \sqrt{x}, l(x) = \sqrt[3]{x}$
2. $f(x) = e^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
3. $f(x) = \ln x, g(x) = \log_{0,5} x$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x, g(x) = \cos x, h(x) = \tan x$
5. $f(x) = \sec x, g(x) = \operatorname{cosec} x, h(x) = \operatorname{cotan} x$
6. $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x, g(x) = \operatorname{arc\,cos} x, h(x) = \operatorname{arctan} x$

Ejercicio 2.15. *Representar gráficamente las siguientes funciones de una variable:*

a) $f(x) = \frac{2+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

b) $f(x) = e^{x^6} \frac{1+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

Ejercicio 2.16. *Representar* $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$ *en el intervalo* $[-2\pi, 2\pi]$ *en un mismo dibujo.*

Ejercicio 2.17. *Representar, en un mismo dibujo, la función* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *y el desarrollo de MacLaurin de grado 5 de esta función. Comentar el resultado.*

Ejercicio 2.18. *Representar gráficamente las siguientes funciones de varias variables:*

a) $f(x, y) = 3 \log(x^2 + y^2)$ *en el dominio* $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ *en el dominio* $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Ejercicio 2.19. *Representar gráficamente las siguientes curvas en el plano y el espacio:*

a) $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$ *, en el dominio* $[0, 2\pi]$.

b) $\begin{cases} x(t) = \frac{5}{t} \\ y(t) = t^4 \end{cases}$ *, en el dominio* $[-1, 1]$.

Ejercicio 2.20. *Representar las siguientes superficies en el espacio:*

a) $\begin{cases} x(u,v) = \sin(2u) \\ y(u,v) = \cos(3u) \\ z(u,v) = 5v \end{cases}$ *, en el dominio* $[0, 2\pi] \times [0, 4]$.

b) $\begin{cases} x(u,v) = \cos(u)(3 + \cos v) \\ y(u,v) = \sin(u)(3 + \cos v) \\ z(u,v) = \sin(v) \end{cases}$ *, en el dominio* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Práctica 3

Métodos numéricos de Integración.

En este capítulo vamos a repasar los conceptos que se han introducido en las clases de teoría: sumas de Riemann y métodos numéricos para calcular valores aproximados de una integral. En la primera parte de la práctica os daré las funciones para que el ordenador construya y dibuje las sumas de Riemann, en la segunda seréis vosotros los que debéis programar los métodos numéricos de Simpson y del Trapecio.

3.1. Construcción de las sumas de Riemann y dibujo de las mismas

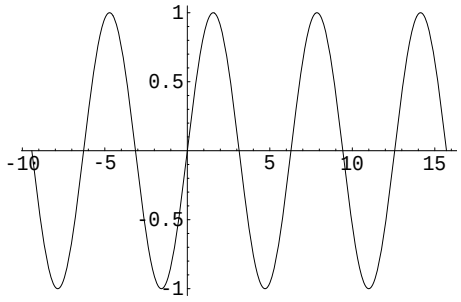
En esta sección damos la construcción de las funciones GraficoSumaInferiorRiemann, GraficoSumaSuperiorRiemann, SumaInferiorRiemann, SumaSuperiorRiemann. Las cuatro funciones dependen de cuatro parámetros, los dos primeros corresponden respectivamente al extremo inferior y superior del intervalo de definición de la función f por integrar. La función que se integra se pasa en el tercer parámetro. Por último, en el cuarto parámetro se pasa el número de particiones en el intervalo para construir las sumas inferiores y superiores de Riemann.

Recuerda que en la construcción de una función los parámetros en la definición se ponen seguidos de un subrayado. Por ejemplo si queremos construir una función que dependa de dos parátros, a y b, para dibujar e integrar la función seno en el intervalo $[a, b]$, las órdenes que se deben pasar a **Mathematica**; son las siguientes:

$In[5] :=$ DibujaIntegraSeno$[a_, b_] :=$
{Plot[sin$[x]$, $\{x, a, b\}$];
Integrate[sin$[x]$, $\{x, a, b\}$]}

Observa que el nombre DibujaIntegraSeno depende de nosotros y cada uno puede poner el que quiera, por otro lado, para ejecutar varias órdenes en la definición de una función las hemos encerrado entre llaves y las hemos separado por puntos y comas. Ahora utilizamos la función anterior para integrar y dibujar la función seno en el intervalo $[-3\pi, 5\pi]$:

$In[6] :=$ DibujaIntegraSeno$[-3\pi,\ 5\pi]$



$Out[6] := \{0\}$

Ejercicio 3.1. *Construye una función que dependa de* 3 *variables de tal manera que pasándole como variables una función y los extremos del intervalo nos dibuje e integre la función en dicho intervalo.*

A continuación damos ya la construcción de las funciones que nos dibujan y calculas las sumas de Riemann. Como ejemplo ponemos el dibujo y el cálculo de las sumas superiores e inferiores de Riemann de la función seno haciendo 20 y 40 particiones del intervalo [0,3Pi].

Construcción de las sumas de Riemann y dibujo de las mismas

En esta sección damos la construcción de las funciones GraficoSumaInferior-Riemann, GraficoSumaSuperiorRiemann, SumaInferiorRiemann, SumaSuperiorRiemann. Las cuatro funciones dependen de cuatro parámetros, los dos primeros corresponden respectivamente al extremo inferior y superior del intervalo de definición de la función f por integrar. La función que se integra se pasa en el tercer parámetro. Por último, en el cuarto parámetro se pasa el número de particiones en el intervalo para construir las sumas inferiores y superiores de Riemann.

A continuación damos ya la construcción de las funciones que nos dibujan y calculan las sumas de Riemann. Como ejemplo ponemos el dibujo y el cálculo de

las sumas superiores e inferiores de Riemann de la función seno haciendo 20 y 40 particiones del intervalo $[0, 3\pi]$.

Definición de la función que calcula el gráfico de la suma inferior de Riemann

```
In[1] := GraficoSumaInferiorRiemann[a_, b_, f_, n_] :=
Block[{h, region, h1, t1, t2},
g[u_] := f/.{x → u};
h = N[(b − a)/n];
y[i_] := a + i ∗ h;
t1[i_] :=
FindMinimum [g[x],
{x, y[i − 1], y[i − 1], y[i]}][[1]];
t2[i_] :=If[NumberQ[t1[i]],
Min[t1[i],N[g[y[i − 1]]],N[g[y[i]]]],
Min[N[g[y[i − 1]]],N[g[y[i]]]]];
h1[i_]:=Rectangle[{y[i − 1], 0},
{y[i], t2[i]}];
region=Plot[g[x],{x, a, b},
DisplayFunction→ Identity,
PlotLabel→ SequenceForm[
"Suma inferior para n = ",n]];
Show[
Graphics[
Table[{RGBColor[0, 1, 0],h1[i]},
{i, 1, n}]],region,
DisplayFunction→ $DisplayFunction,
Axes→ True,
PlotLabel→ SequenceForm[
"Suma inferior para n = ",n]]];


In[2] := GraficoSumaInferiorRiemann[0,3π,Sin[x],20];
GraficoSumaInferiorRiemann[0,3π,Sin[x],40];
```

$Out[2] :=$

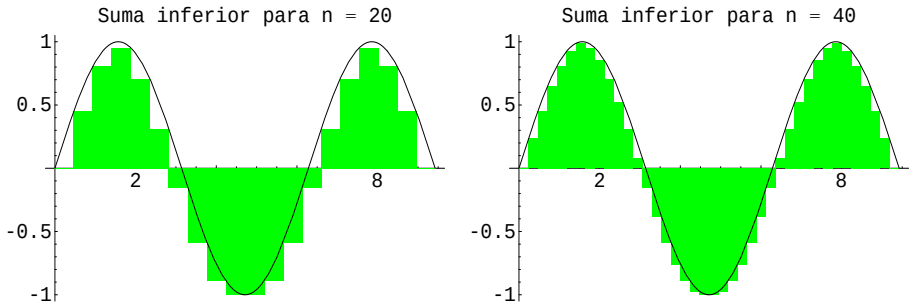


Figura 3.1: Sumas inferiores de Riemann de la función seno para 20 y 40 particiones

Definición de la función que calcula el gráfico de la suma superior de Riemann

$In[3] :=$ GraficoSumaSuperiorRiemann[$a_, b_, f_, n_$]:=
Block[{$h, region, h1, t1, t2$},
$g[u_]$:=f/.{$x \to u$};
h=N[$(b-a)/n$];
$y[i_]$:=$a + i * h$;
$t1[i_]$:=
FindMinimum[$-g[x]$,
{$x, y[i-1], y[i-1], y[i]$}][[1]];
$t2[i_]$:=If[NumberQ[$t1[i]$],
Max[$-t1[i]$,N[$g[y[i-1]]$],N[$g[y[i]]$]],
Max[N[$g[y[i-1]]$],N[$g[y[i]]$]]];
$h1[i_]$:=Rectangle[{$y[i-1], 0$},
{$y[i], t2[i]$}];
region=Plot[$g[x]$, {x, a, b},
DisplayFunction→ Identity,
PlotLabel→ SequenceForm[
"Suma superior para n = ",n]];
Show[
Graphics[
Table[{RGBColor[0, 0, 1],$h1[i]$},
{$i, 1, n$}]],region,
DisplayFunction→ $DisplayFunction,
Axes→ True,
PlotLabel→ SequenceForm[
"Suma superior para n = ",n]]];

$In[4] :=$ GraficoSumaSuperiorRiemann[0,3π,Sin[x],20];
GraficoSumaSuperiorRiemann[0,3π,Sin[x],40];

$Out[4] :=$

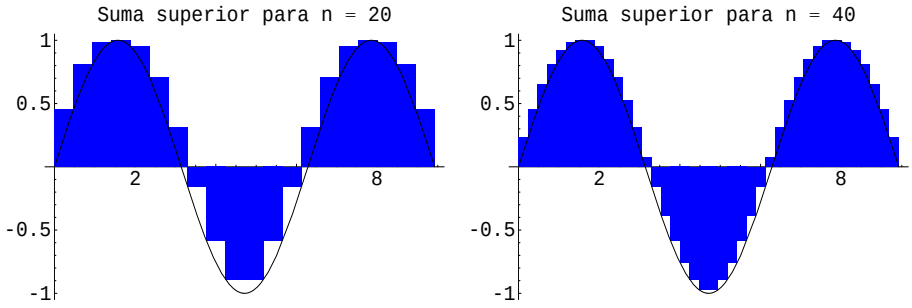


Figura 3.2: Sumas superiores de Riemann de la función seno para 20 y 40 particiones

Definición de las funciones que calculan el valor de las sumas inferiores y superiores de una función

$In[5] :=$ SumaInferiorRiemann$[a_, b_, f_, n_]:=$
Block$[\{h, region, h1, t1, t2\},$
$g[u_]:=f/.\{x \to u\};$
h=N$[(b-a)/n];$
$y[i_]:=a+i*h;$
$t1[i_]:=$
FindMinimum$[g[x],$
$\{x, y[i-1], y[i-1], y[i]\}][[1]];$
$t2[i_]:=$If[NumberQ$[t1[i]],$
Min$[t1[i]$,N$[g[y[i-1]]]$,N$[g[y[i]]]],$
Min[N$[g[y[i-1]]]$,N$[g[y[i]]]]];$
Sum$[(y[i]-y[i-1])t2[i]$,$\{i, 1, n\}]];$

$In[6] :=$ SumaSuperiorRiemann$[a_, b_, f_, n_]:=$
Block$[\{h, region, h1, t1, t2\},$
$g[u_]:=$f/.$\{x \to u\};$
h=N$[(b-a)/n];$
$y[i_]:=a+i*h;$
$t1[i_]:=$
FindMinimum$[-g[x],$
$\{x, y[i-1], y[i-1], y[i]\}][[1]];$
$t2[i_]:=$If[NumberQ$[t1[i]],$
Max$[-t1[i]$,N$[g[y[i-1]]]$,N$[g[y[i]]]],$
Max[N$[g[y[i-1]]]$,N$[g[y[i]]]]];$
Sum$[(y[i]-y[i-1])t2[i]$,$\{i, 1, n\}]];$

Observa ahora los valores de las sumas superiores e inferiores de Riemann y compáralos con el valor exacto de la integral

$In[7]$:= SumaInferiorRiemann[0,3π,Sin[x],20]
SumaInferiorRiemann[0,3π,Sin[x],40]
SumaSuperiorRiemann[0,3π,Sin[x],20]
SumaSuperiorRiemann[0,3π,Sin[x],40]
Integrate[Sin[x],{$x, 0, 3\pi$}]

$Out[7]$:= 0.560738

1.28533

3.37657

2.6976

2

Ejercicio 3.2. *Haz un número suficiente de particiones para que las sumas superiores e inferiores de Riemann de la función anterior en el mismo intervalo difieran del valor exacto de la integral menos de una décima. Dibuja dichas sumas.*

Ejercicio 3.3. *Haz un número suficiente de particiones para que las sumas superiores e inferiores de Riemann de las siguientes funciones, en el intervalo que se indica, difieran del valor exacto de la integral menos de una décima y dibuja dichas sumas:*

1. $f(x) = x^2$ *en* $[0, 2]$
2. $g(x) = e^{x^2}$ *en* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
3. $h(x) = \sqrt{x}$ *en* $[0, 4]$
4. $k(x) = \cos x$ *en* $[0, \frac{\pi}{2}]$

3.2. Reglas del trapecio y de Simpson

A pesar de que la regla de Barrow permite calcular el valor de integrales definidas de funciones que admiten primitivas, no siempre es fácil calcular dicha primitiva. Por ello es necesario disponer de métodos alternativos para calcular el valor de las integrales, la alternativa la dan los métodos numéricos. Estudiaremos dos de ellos: *la regla del trapecio y el método de Simpson.*

3.2.1. La regla del trapecio.

Dada una función $f : [a, b] :\to \mathbb{R}$ integrable, la regla del trapecio consiste en aproximar la integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$ por $\int_a^b P_1(x)\ dx$, donde $P_1(x)$ es el único polinomio de grado 1 (recta) que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así que:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b P_1(x)\ dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

y el error que cometemos de dicha aproximación, si la función f es de clase $\mathcal{C}^2$, es:

$$E = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(c),$$

donde c es un punto del intervalo (a,b).

El error anterior puede reducirse si utilizamos la regla del trapecio compuesta, ésta consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$ y aplicar la regla del trapecio simple a cada uno de los intervalos $[a + jh, a + (j + 1)h]$ con $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Éste método proporciona la aproximación:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)\right)$$

para esta aproximación el error que se comete, si f es de clase $\mathcal{C}^2$,es:

$$E = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(c),$$

siendo c un punto del intervalo (a,b).

Construcción con Matemathica.

Como acabamos de ver, la regla del trapecio se basa en aproximar el valor de la integral Integrate[f[x],{x,a,b}] por la suma: $\sum_{j=1}^{n-1} h\ f[a + j\ h]$, donde $h = \frac{b-a}{n}$.

A la hora de construir una función para calcular la suma anterior se puede optar por utilizar el comando Sum de *Mathematica*, pero lo que pretendemos es implementar nosotros mismos el algoritmo para calcular la suma mediante un bucle For. La función For tiene la siguiente estructura:

For[contador=valor inicial, límite del contador, incremento del contador, órdenes a realizar para cada valor del contador].

Ponemos un ejemplo para aclarar el comando For. Dibujaremos las funciones Sin[x], 2 Sin[x],...,5 Sin[x] en el intervalo [0,Pi].

In[1]:= $\text{For}[j = 1, j < 6, j++, \text{Plot}[j \text{ Sin } [\text{x}], \{x, 0, \pi\}]]$

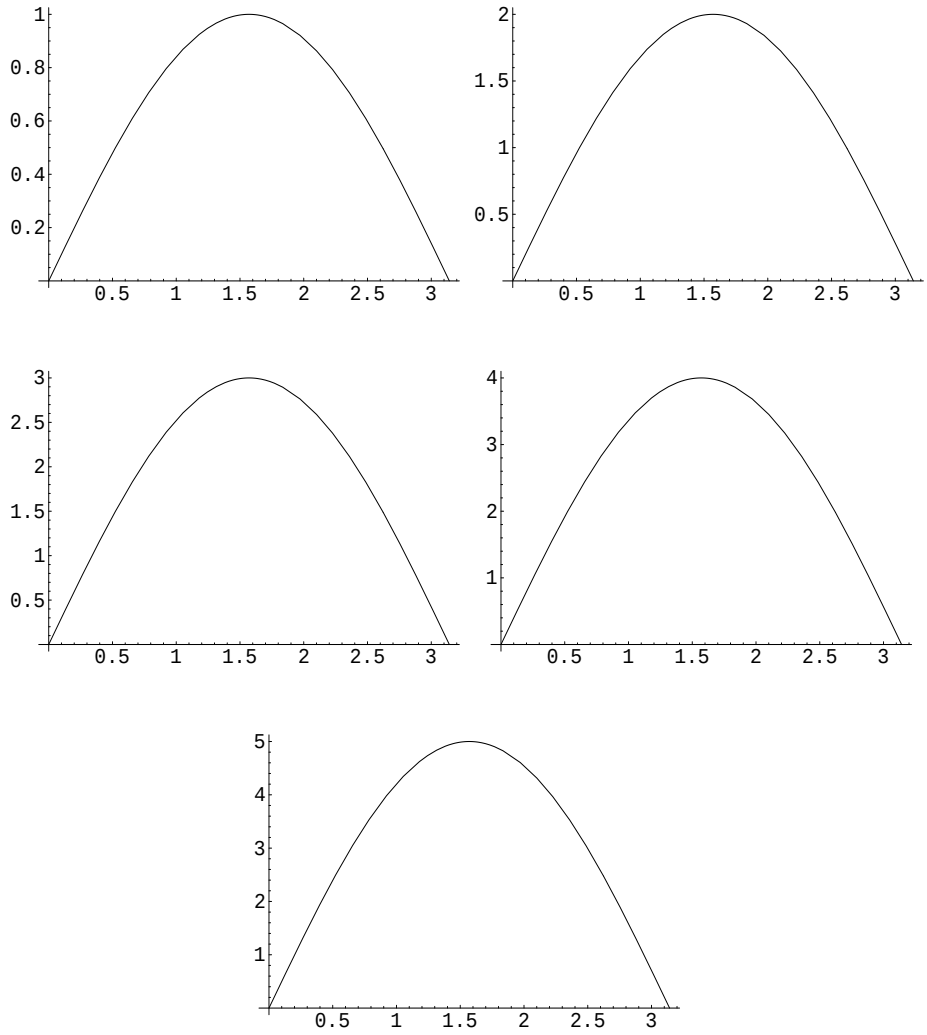


Figura 3.3: Out[1]

Por fin damos la implementación de la regla del trapecio para un número n de particiones en el intervalo [a,b]. La función da como resultado un conjunto de 4 números, el primero es el valor exacto de la integral calculado con el comando Integrate, el segundo es el valor calculado por el método del trapecio, el tercero es el error y el cuarto el número de particiones que se han hecho en el intervalo.

IntegraTrapecio[$f_, a_, b_, n_$]**:={**
Clear[$integral,\ h,\ valorexacto$];
$h := (b-a)/n$**;**
$integral = h/2\ (f/.x \to a + f/.x \to b)$**;**
For[$j = 1, j \leq n-1, j++,$
$integral = integral + h\ f/.x- > a + j\ h$]**;**
$valorexacto$**:=Integrate**[$f, \{x, a, b\}$]**;**
$error$**=N**[**Abs**[$valorexacto - integral$]]**;**
$resultadostrapecio$**=**
{N[$valorexacto$]**,N**[$integral$]**,**$error, n$**}}**

Ejemplo 3.1.

$$\begin{aligned} In[2] &:= \textbf{IntegraTrapecio}[\textbf{Sin}[x], 0, \pi, 5] \\ Out[2] &= \{\{2.,1{,}93377,0{,}0662344,5\}\} \end{aligned}$$

3.2.2. La regla de Simpson.

La idea de esta regla es aproximar la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a integrar por el polinomio de grado 2 (único) que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ y $(b, f(b))$. De esta forma se obtiene la aproximación:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b P_2(x)\ dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)).$$

Además si la función es de clase $\mathcal{C}^4$, existe $c \in (a,b)$ tal que, el error que se comete en la aproximación es:

$$E = -\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(iv)}(c),$$

donde c es un punto del intervalo (a,b).

Al igual que en la regla del trapecio, si subdividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes y aplicamos a cada una de ellas la regla de Simpson, se obtiene una mejor aproximación de la integral:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=2}^{n/2} f(a + 2(j-1)h) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(a + (2j-1)h)\right)$$

con un error, si f es de clase $\mathcal{C}^4$, dado por:

$$E = -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(iv)}(c),$$

estando c en (a,b).

Construcción con Matemathica.

Ejercicio 3.4. *Construye la función* **IntegraSimpson** *similar a* **IntegraTrapecio** *pero que devuelva el valor aproximado de la integral calculado con la regla de Simpson. Ten en cuenta que el método de Simpson sólo se puede aplicar haciendo un número par de subdivisiones del intervalo. Constata que la aplicación de dicho método a la función Sin[x] en el intervalo [0,Pi] da como resultado {{2.,1.68755,0.312445,5}}.*

3.2.3. Reglas del trapecio y Simpson. Comparación

Una vez construidas las reglas del trapecio y de Simpson vamos a comparar ambos métodos para ver que, en general, el método de Simpson da un valor más cercano al valor de la integral. Para ello se utiliza un bucle For para construir dos tablas, una con los valores que nos da el método de Simpson y otra con la que nos da el método del Trapecio para diferente número de subdivisiones del intervalo.

Ejemplo 3.2. *Las siguientes órdenes construyen dos tablas, cada una de ellas da los resultados del método del Trapecio y Simpson aplicados a la función Sin[x] en el intervalo* $[0, \pi]$ *para 2, 4, 6, 8, 10 y 12 subdivisiones.*

In[3]:= **Clear[tablatrapecio,tablasimpson];**
tablatrapecio={};
tablasimpson={};
For$[i = 2, i \leq 12, i = i + 2,$
IntegraTrapecio[Sin$[x], 0, \pi, i]$**;**
tablatrapecio=
Append[tablatrapecio, resultadostrapecio];
IntegraSimpson[Sin$[x], 0, \pi, i]$**;**
tablasimpson=
Append[tablasimpson, resusimpson];];
tablatrapecio
tablasimpson

Out[3]= {{2.,1.5708,0.429204,2},
{2.,1.89612,0.103881,4},
{2.,1.9541,0.0459028,6},
{2.,1.97423,0.0257684,8},
{2.,1.98352,0.0164765,10},

```
                {2.,1.98856,0.0114362,12}}
Out[3]= {{2.,2.0944,0.0943951,2},
         {2.,2.00456,0.00455975,4},
         {2.,2.00086,0.00086319,6},
         {2.,2.00027,0.00026917,8},
         {2.,2.00011,0.000109517,10},
         {2.,2.00005,0.0000526243,12}}
```

Ejercicio 3.5. *Compara los resultados de integración por el método de Simpson y del Trapecio para la función* $Log[2x] + Cos[3x]$ *en el intervalo* $[\pi, 3\pi]$. *Dibuja previamente la función.*

3.2.4. Criterio de parada del método de integración

Hasta ahora no hemos hecho nada más que aplicar los métodos de integración para un número determinado de subdivisiones del intervalo, si dicho número de subdivisiones lo hacemos grande podemos hacer que el error disminuya tanto como deseemos. Se trata ahora de intentar dar un criterio para calcular un valor aproximado de la integral aceptable.

Una primera opción sería aplicar el método de integración elegido con dos subdivisiones del intervalo y calcular una mayoración del error. Si el error es menor que el que deseamos, el valor aproximado calculado es el que queremos, si no se repite el proceso para un número mayor de subdivisiones, se mayora el error y se pasa el test para ver si el error es aceptable o no. Caso de ser aceptable el error paramos, si no seguimos el proceso con un número mayor de subdivisiones.

El problema de calcular una mayoración del error es que es necesario derivadas segundas o cuartas según el método para posteriormente calcular máximos de dichas derivadas. Estos cálculos son lentos con lo que el criterio de parada debe ser otro para que el cálculo de una integral no lleve un tiempo excesivo.

El criterio de parada que se suele aceptar es ir comparando el valor aproximado de la integral para un número n de subdivisiones, I_n, y el valor aproximado para $m > n$ subdivisiones, I_m. Se hace la diferencia entre ambos valores y si dicha diferencia es menor que el error pretendido entonces aceptamos I_m como valor de la integral.

A continuación implementamos el algoritmo para el método del Trapecio. En dicha implementación hemos utilizado un bucle While[condición, órdenes] que ejecuta las órdenes del segundo argumento mientras que la condición del primer argumento sea cierta.

In[4]:= **Clear[error, tolerancia, integralold, integral, resultados];**
IntegraTrapecioStop[$f_$**,** $a_$**,** $b_$**, tolerancia**$_$**]:={**
integralold=0;
error=tolerancia+1
$n = 1$**;**
integralold $= \ h/2\ (f/.x \to a + f/.x \to b)$**;**
For[$j = 1,\ j \leq n - 1,\ j++,$
integralold = integralold + $h\ f/.x- > a + j\ h$**];**
$n = 2$**;**
While[error $>$ **tolerancia,**
$h := (b - a)/n$**;**
integral $= 0$**;**
integral $= \ h/2\ (f/.x \to a + f/.x \to b)$**;**
For[$j = 1,\ j \leq n - 1,\ j++,$
integral = integral $+h\ f/.x- > a + j\ h$**];**
error = Abs[integralold - integral];
integralold = integral;
$n = n + 1$**;];**
resultados = {N[integral], n**}}**

Ejemplo 3.3. *Obtenemos mediante el método del trapecio el valor de la integral de* $\operatorname{sen} x$ *en el intervalo* $[0, \pi]$ *con una diferencia entre aproximaciones sucesivas menor de* $1/1000$*. El resultado es un conjunto de dos números, el primero da la aproximación de la integral y el segundo da el número de subdivisiones necesitadas, en este caso* 17*.*

In[5]:= **IntegraTrapecioStop[Sin[x],** $0,\ \pi,\ 1/1000$**]**
Out[5]:={{1,99357, 17}}

Ejercicio 3.6. *Construye de manera análoga la función* **IntegraSimpsonStop** *y calcula la misma integral con el mismo error para aproximaciones sucesivas.*

Práctica 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

4.1. Resumen de comandos

Los comandos básicos para el desarrollo de esta práctica serán los siguientes:

1. $DSolve[ec == 0, y[x], x]$, este comando resuelve la ecuación diferencial "ec=0" dándonos como solución una función $y(x)$.
2. $DSolve[\{ec == 0, condicionesiniciales\}, y[x], x]$, con este comando resolvemos el problema de Cauchy con ecuación diferencial "ec=0" y condiciones iniciales "condicionesiniciales".
3. $DSolve[\{ec1 == 0, ec2 == 0, \dots\}, \{y1[x], y2[x], \dots\}, x]$ resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales dando como solución las funciones soluciones $y1(x), y2(x), \dots$.

El programa **Mathematica** encuentra siempre soluciones, aunque muchas veces no sean analíticas sino numéricas (en este caso el comando $DSolve[\dots]$ habría que sustituirlo por $NDSolve[\dots, \{x, a, b\}]$). Sin embargo, sí que encuentra soluciones analíticas cuando las ecuaciones son lineales con coeficientes constantes.

4.2. Ejemplos

Ejemplo 4.1. *In[20]:=* $ec1=DSolve[\{y'[x] == (x + y[x])/x, y[2] == 2\}, y[x], x]$

Out[20]=$y[x] \to x(1 - Log[2]) + xLog[x]$

In[25]:=$Plot[Evaluate[y[x]/.ec1], \{x, 0, 1\}]$

Out[25]:= (ver figura).

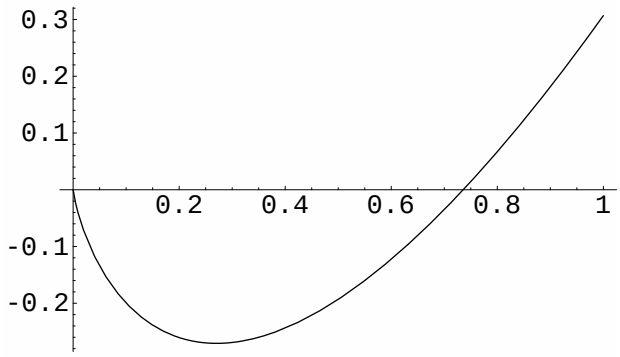


Figura 4.1: Out[25]

Observación 4.1. *Conviene hacer notar que los* In[*]:= *y los* Out[*]:= *los pone el programa por defecto y no sois vosotros los que debéis escribirlos.*

No siempre el programa **Mathematica** *tiene éxito para encontrar una solución analítica. En dichos casos el programa* **Mathematica** *permite hacer una resolución numérica y un dibujo de la función solución. En esta práctica no nos ocuparemos de este caso.*

Finalmente, recalcamos que en el ejemplo anterior hemos obtenido una solución concreta porque hemos puesto una condición inicial ($y(2) = 2$). Si no la hubiéramos puesto, hubiésemos obtenido una solución dependiente de un parámetro como muestra el ejemplo siguiente, que no podremos dibujar.

Ejemplo 4.2. *In[27]:= ec2 = DSolve[y'[x] == x^2/(y[x](1 + x^3)), y[x], x]*

Out[27]= $\{\{y[x] \Rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{3C[1] + Log[1 + x^3]}\}, \{y[x] \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{3C[1] + Log[1 + x^3]}\}\}$

Ejercicio 4.1. *Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales:*

1. $y' = y + t - 3$, $y(0) = 3$
2. $y' - y \tan x = x$
3. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$
4. $\begin{cases} x' + 2x + 4y &= 1 + 4t \\ y' + x - y &= 3t^2/2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = & 2x - 2y + 3z \\ y' = & x + y + z \\ z' = & x + 3y - z \end{cases}$

Ejercicio 4.2. *Aplicar el comando NDSolve para obtener soluciones numéricas de la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{2}x' + x^3 & = \operatorname{sen} t \\ x(0) = x'(0) & = 0. \end{cases}$$

en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ *y representar gráficamente la solución .*

Ejercicio 4.3. *Resuelve la ecuación diferencial* $y' = \cos(xy)$ *con condición de Cauchy* $y(1) = 0$*. Dibuja la función para valores de la variable independiente entre -1 y 1.*

4.3. Osciladores armónicos no acoplados

El objetivo de esta sección es el de obtener las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un carro sometido a la fuerza de un muelle.

Vibraciones armónicas simples no amortiguadas

De acuerdo a la ley de Hooke y a la segunda ley de Newton, si denotamos por $x(t)$ la posición del carro (considerando la posición de equilibrio en $x = 0$), por k la rigidez del muelle y por m la masa del carro, entonces

$$mx''(t) = -kx.$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$x''(t) + \frac{k}{m}x = 0,$$

cuya solución general hemos visto que es (podéis resolverla a mano)

$$x(t) = c_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + c_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

Así que si movemos el carro a una posición $x = x_0$ y allí lo soltamos con velocidad inicial 0, el movimiento del carro viene dado por la función

$$x(t) = x_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t),$$

es decir, el carro se mueve periódicamente alrededor de la posición de equilibrio con periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Un estudio concreto para $k = m = 1$

Vamos a hacer un estudio de este movimiento para valores concretos del parámetro. En particular, elegimos $k = m = 1$. Para ello obtenemos las funciones $x(t)$ y $x'(t)$ con el programa **Mathematica**.

In[51]:=

$ec3 = DSolve[\{x''[t] + x[t] == 0, x[0] == 2, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

Out[51]=

$\{\{x[t] \Rightarrow 2Cos[t]\}\}$

In[52]:=

$y[t_] := Evaluate[x[t]/.ec3]$

$z[t_] := D[y[t], t]$

In[54]:=

$d1 = Plot[Evaluate[z[t]], \{t, 0, 2Pi\}, PlotStyle- > \{Dashing[0,02]\}]$

$d2 = Plot[y[t], \{t, 0, 2Pi\}, PlotStyle- > \{Dashing[0,08]\}]$

$Show[d1, d2]$

Out[54]:=(ver las figuras 3, 4 y 5).

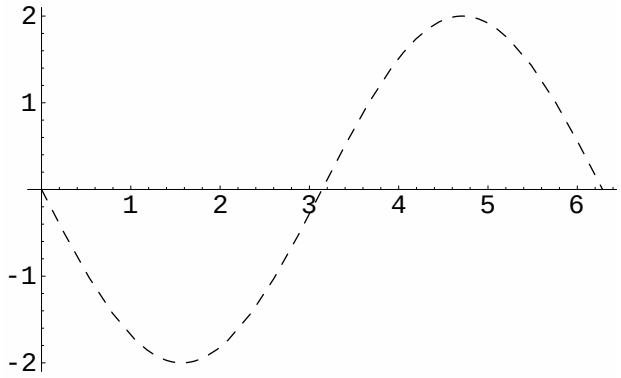


Figura 4.2: Out[54]. Gráfica de $z(t)$.

Ejercicio 4.4. *Resolver con* **Mathematica** *la ecuación diferencial* $x'' + \frac{6}{7}x = 0$ *con condiciones iniciales* $x(0) = 2$ *y* $x'(0) = 1$. *Se pide que dibujéis la gráfica de* x *y* x' *en el intervalo* $(0, 4\pi\sqrt{\frac{7}{6}})$ *y que halléis visualmente el máximo valor que toma* $x(t)$ *y* $x'(t)$.

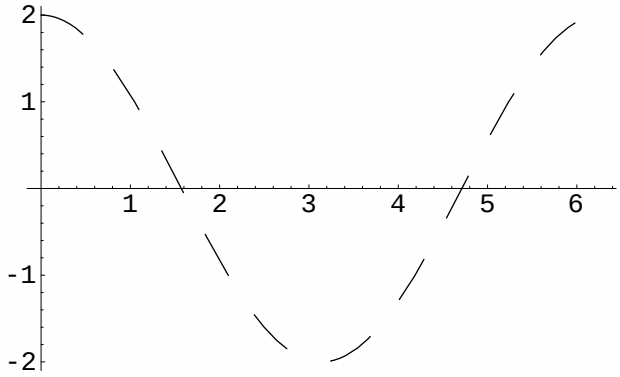


Figura 4.3: Out[54]. Gráfica de $y(t)$.

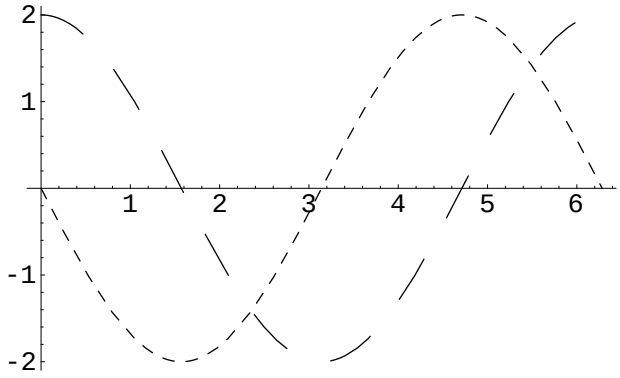


Figura 4.4: Out[54]. Gráficas de $z(t)$ e $y(t)$

Vibraciones armónicas simples amortiguadas

El movimiento hasta aquí descrito es irreal puesto que siempre tendremos una *fuerza de amortiguamiento* debida a la viscosidad del medio donde el carro se abre paso. Si suponemos que dicha fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad y se opone al movimiento, la ecuación que nos da el movimiento del carro es

$$mx''(t) = -kx(t) - cx'(t) \quad \text{con } c > 0,$$

que se puede reescribir como

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{4.1}$$

Resolvemos seguidamente la ecuación diferencial anterior con las condiciones de

contorno dadas en el caso no amortiguado, es decir, $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$. Para ello se resuelve la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial, de donde se obtienen las raíces $r_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$ y $r_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$.

Para dar la resolución hace falta distinguir tres casos:

1. Si $(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m} > 0$ se sigue que las raíces r_1 y r_2 son números reales negativos y la solución de la ecuación diferencial 4.1 es

$$x(t) = \frac{x_0 r_1 e^{r_2 t} - x_0 r_2 e^{r_1 t}}{r_1 - r_2}.$$

Una representación gráfica de la anterior función nos hará ver que este caso el carro no oscila en torno a la posición de equilibrio, sino que se mueve de regreso a la posición de equilibrio. Diremos que estamos en un movimiento *sobreamortiguado.*

Ejemplo 4.3. *Como ejemplo de este caso resolveremos la ecuación diferencial anterior con* $m = 25$, $k = 4$ *y* $c = 10$. *Así con lo que* $(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m} > 0$ *y estamos en el caso sobreamortiguado. Consideraremos además que* $x(0) = 5$ *y que* $x'(0) = 0$.

In[1a]:=

$ec1 = DSolve[\{x''[t] == -4x[t] - 10x'[t], x[0] == 5, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

Out[1a]:= $\{\{x[t] \to \left(\frac{5}{2} - \frac{25}{2\sqrt{21}}\right) e^{\left(-5-\sqrt{21}\right)\ t} + \frac{5}{42}\left(21 + 5\sqrt{21}\right) e^{\left(-5+\sqrt{21}\right)\ t}\}\}$

In[2a]:=

$y[t_] := Evaluate[x[t]/.ec1]$

$z[t_] := D[y[t], t]$

In[3a]:=

$d1 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec1], \{t, 0, 1\}];$

$d2 = Plot[Evaluate[z[t]], \{t, 0, 1\},\ PlotStyle- > \{Dashing[\{0{,}08\}]\}];$

$Show[d1, d2];$

Out[3a]:=(no reproducimos más que el último gráfico de la salida 3, que engloba los dos primeros.)

Ejercicio 4.5. *Resuelve la ecuación diferencial*

$$x''(t) + 14x'(t) + \frac{14}{5}x(t) = 0,$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 7$ *y* $x'(0) = -1$.

Da una representación gráfica de $x(t)$ *y de* $x'(t)$ *así como la amplitud máxima de* $x(t)$ *mirando la gráfica de* $x(t)$.

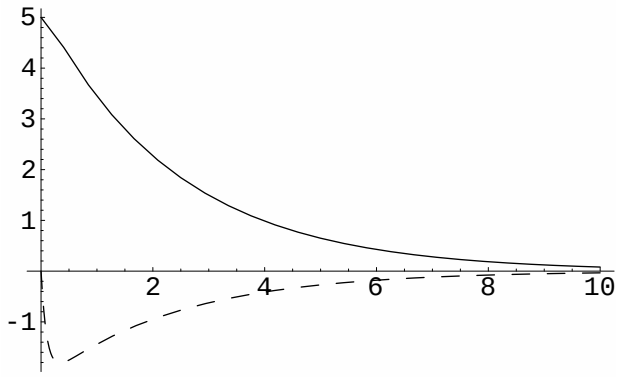


Figura 4.5: Out[3a]. Gráfica de $x(t)$ en trazo continuo y $x'(t)$ en trazo discontinuo

2. Consideramos en este caso que $(\frac{c}{2m})^2 = \frac{k}{m}$, con lo que la ecuación característica tiene una raíz doble $r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m} = -\sqrt{\frac{k}{m}}$, con lo cual la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_0 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

Un estudio de esta función nos muestra que en este caso tampoco hay oscilación y el carro tiende a pararse. A este movimiento se le denomina *críticamente amortiguado.*

Ejemplo 4.4. *Como ejemplo de este caso resolvermos y representamos gráficamente el caso* $m = 25$, $k = 4$ *y* $c = 10$, *con lo que* $(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m} = 0$ *y estamos en el caso sobreamortiguado. Consideraremos además que* $x(0) = 5$ *y que* $x'(0) = 0$.

In[1]:=

$ec1 = DSolve[\{x''[t] == -25x[t] - 10x'[t], x[0] == 5, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

Out[1]:=

$\{\{x[t] \to e^{-5\ t}\ (5 + 25\ t)\}\}$

In[2]:= $y[t_] := Evaluate[x[t]/.ec1]$

$z[t_] := D[y[t], t]$

In[3]:=

$d1 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec1], \{t, 0, 1\}];$

$d2 = Plot[Evaluate[z[t]], \{t, 0, 1\},\ \ PlotStyle- > \{Dashing[\{0{,}08\}]\}];$

$Show[d1, d2];$

Out[3]:=(no reproducimos más que el último gráfico de la salida 3, que engloba los dos primeros.)

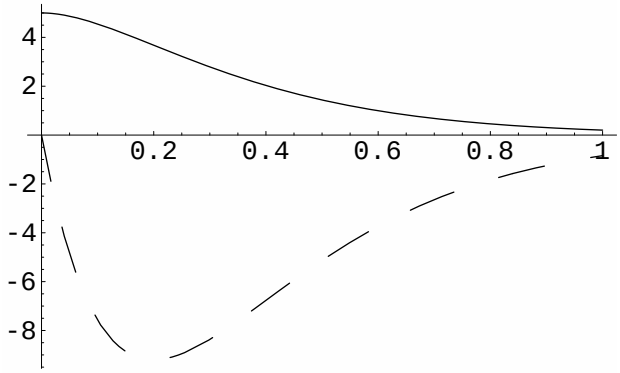


Figura 4.6: Out[3]. Gráfica de $x(t)$ en trazo continuo e $y(t)$ en trazo discontinuo

Ejercicio 4.6. *Resuelve la ecuación diferencial*

$$x''(t) + 14x'(t) + \frac{14^2}{4}x(t) = 0,$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 3$ *y* $x'(0) = -1$.

Da una representación gráfica de $x(t)$ *y de* $x'(t)$ *así como la amplitud máxima de* $x(t)$ *mirando la gráfica de* $x(t)$.

3. Queda por considerar el caso donde las dos raíces de la ecuación característica son complejas y conjugadas, que denotaremos por $r_1 = -\frac{c}{2m} + a$ y por $r_2 = -\frac{c}{2m} + a$, donde $a = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{c}{2m})^2}$. La solución de 4.1 en este caso es

$$x(t) = \frac{x_0}{a}e^{-\frac{c}{2m}t}(a\cos(at) + \frac{c}{2m}\sin(at)),$$

función que puede reescribirse como

$$x(t) = \frac{x_0\sqrt{a^2 + (\frac{c}{2m})^2}}{a}e^{-\frac{c}{2m}t}\cos(at - \theta),$$

donde $\theta = \arctan(\frac{\frac{c}{2m}}{a})$. Esta escritura de $x(t)$ nos dice que el carro oscila en torno al punto de equilibrio con amplitud que decrece exponencialmente. Este movimiento recibe el nombre de *subamortiguado*.

Ejemplo 4.5. *Resolver y representar gráficamente el caso* $m = 1$, $k = 40$, $c = 10$, $x(0) = 5$ *y* $x'(0) = 0$.

In[1c]:=

$ec1 = DSolve[\{x''[t] == -40x[t] - 10x'[t], x[0] == 0{,}1, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

Out[1c]:=

$\{\{x[t] \to 2{,}71828182845905^{-5{,}0000000000000\ t}\ (0{,}100000000000000\ \cos[3{,}8729833462074\ t] + 0{,}129099444873581\ \sin[3{,}8729833462074\ t])\}\}$

In[2c]:=

$y[t_] := Evaluate[x[t]/.ec1]$

$z[t_] := D[y[t], t]$

In[3c]:= $d1 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec1], \{t, 0, 5\}];$

$d2 = Plot[Evaluate[z[t]], \{t, 0, 5\},\ PlotStyle- > \{Dashing[\{0{,}03\}]\}];$

$Show[d1, d2];$

Out[3c]:= (ver las dos figuras siguientes.)

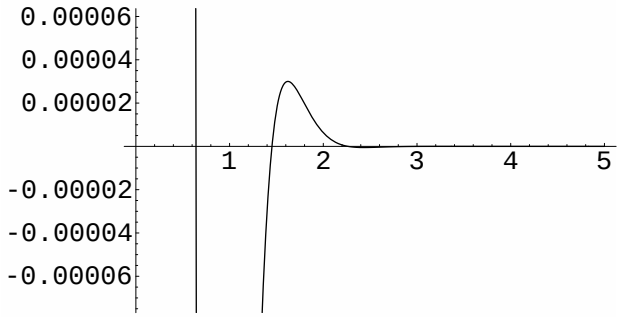


Figura 4.7: Out[3c]:=. Gráfica de $x(t)$

Ejercicio 4.7. *Resuelve la ecuación diferencial*

$$x''(t) + 5x'(t) + \frac{5^3}{3}x(t) = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ *y* $x'(0) = -1$.

Da una representación gráfica de $x(t)$ *y de* $x'(t)$ *así como la amplitud máxima de* $x(t)$ *mirando la gráfica de* $x(t)$.

Ejercicio 4.8. *Clasifica los movimientos de los tres ejercicios anteriores en los grupos subamortiguado, sobreamortiguado y críticamente amortiguado.*

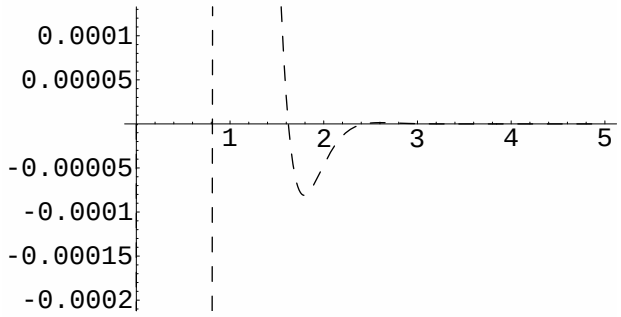


Figura 4.8: Out[3c]:=. Gráfica de $x'(t)$

Movimientos forzados

Hasta aquí hemos considerado el movimiento del carro sin que actúen sobre él fuerzas ajenas al sistema y las únicas ecuaciones lineales que nos han salido son homogéneas. No obstante, si aplicamos al carro una fuerza externa obtendremos un movimiento forzado en general y en algunos casos puede que sea una *vibración forzada*. En clase de problemas nos ocuparemos de este tipo de movimiento considerando fuerzas externas periódicas del estilo a la función $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$, con lo que, la ecuación del movimiento es

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = f(t). \tag{4.2}$$

Pensamos que la resolución de la ecuación 4.2 en general distraerá la atención de los alumnos más que aclarar los métodos de resolución. Pensamos que será mejor resolver problemas concretos donde tengamos valores fijos de los parámetros que están en juego en 4.2. No obstante vamos a hacer un resumen de los posibles movimientos que encontraremos.

Para empezar exponemos que una solución particular de la ecuación 4.2 es

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \psi) \quad \text{donde} \quad \psi = \arctan(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}).$$

Por lo tanto la solución de la ecuación 4.2, $x(t)$, será la suma de una de las soluciones de la ecuación homogénea $x_h(t)$ y la solución particular x_p, es decir $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$. Conviene notar que la parte que proviene de la resolución de la ecuación homogénea tiende hacia cero, con lo cual predomina la solución particular y el movimiento tiende a hacerse oscilatorio de amplitud

$$T = \frac{f_0}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}}.$$

Haremos notar que cuando el parámetro c es pequeño (viscosidad del medio pequeña) y ω se aproxima a $\sqrt{\frac{k}{m}}$ la amplitud de la vibración es muy grande, este fenómeno se conoce con el nombre de *resonancia*. Comentaremos que este es el fenómeno que produjo la ruptura del puente de Tacoma, mostrando una animación que puede encontrarse en la página web.

Ejemplo 4.6. *Para empezar proponemos resolver la ecuación del muelle forzado por una fuerza externa y de tal manera que* $m = 1$, $f_0 = 5$, $k = 4$, $\omega = 2$, $x_0 = 2$ *y como c tomaremos simultáneamente los valores* $10^{-1}, 10^{-4}$ *y* 10^{-8}. *Es fácil observar que* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *y como c toma valores pequeños, encontraremos el fenómeno de la resonancia que se traduce en que la amplitud* $x(t)$ *toma valores cada vez más grandes a medida que el tiempo aumenta.*

In[1d]:=

$ec1 = DSolve[\{x''[t] + 10\hat{}(-1)x'[t] + 4x[t] == 5Cos[2t], x[0] == 2, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

$d1 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec1], \{t, 0, 20\}]$; *Out[1d]:= (ver figura).*

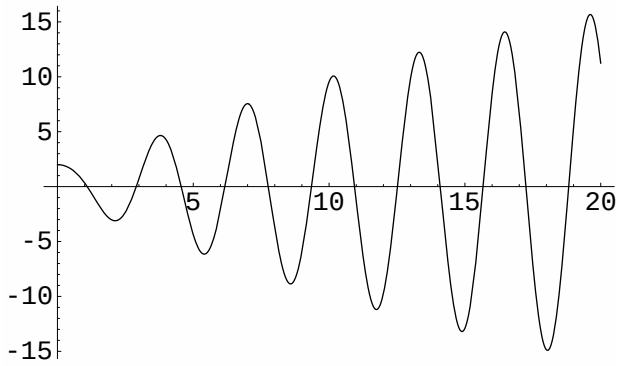


Figura 4.9: Out[1d]

In[2d]:=

$ec2 = DSolve[\{x''[t] + 10\hat{}(-4)x'[t] + 4x[t] == 5Cos[2t], x[0] == 2, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

$d2 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec2], \{t, 0, 20\}, PlotStyle- > \{Dashing[\{0{,}01\}]\}]$;

Out[2d]:=

(ver figura).

In[3d]:=

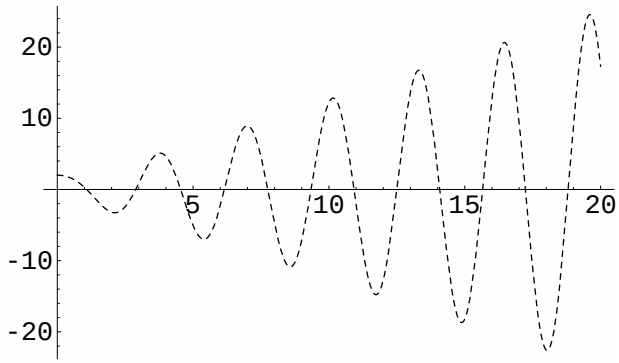


Figura 4.10: Out[2d]

$ec3 = DSolve[\{x''[t] + 10\hat{}(-8)x'[t] + 4x[t] == 5Cos[2t], x[0] == 2, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

$d3 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec3], \{t, 0, 20\}, PlotStyle- > \{Dashing[\{0{,}04\}]\}];$

Out[3d]:= (ver figura).

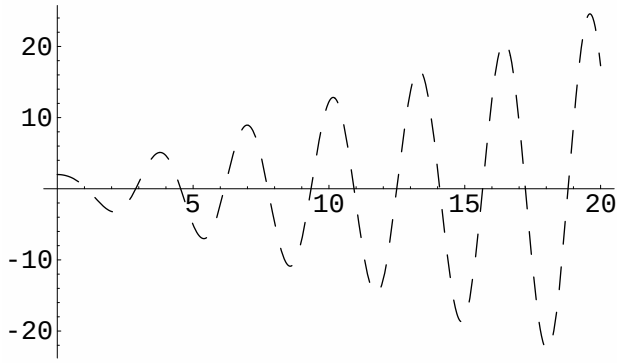


Figura 4.11: Out[3d]

In[4d]:= $Show[d1, d2, d3];$

Out[4d]:=

(ver figura).

Las consecuencias de la resonancia es que las estructuras que la padecen se rompen. Claramente, como las amplitudes de las vibraciones aumentan mucho llega un momento en que la estructura (en este caso el muelle) se rompe.

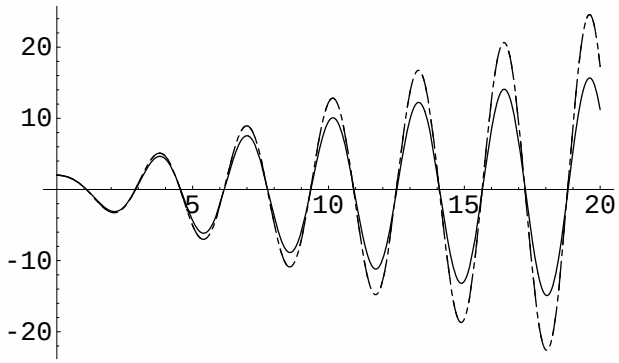


Figura 4.12: Out[4d]

Ejemplo 4.7. *Ahora resolvemos la ecuación del muelle forzado en un caso en el que no existe resonancia. Para ello tomaremos los valores* $m = 1$, $f_0 = 5$, $k = 4$, $\omega = 2$, $x_0 = 2$ *y como c tomaremos el valor* 10^{-4}. *Es fácil observar que* $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ *por lo tanto, en principio, no debe darse el fenómeno de la resonancia y las amplitudes de vibración,* $x(t)$, *no deben hacerse muy grandes.*

In[1e]:= $ec1 = DSolve[\{x''[t]+10\hat{}(-4)x'[t]+4x[t] == 5\cos[3t], x[0] == 2, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

$d1 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec1], \{t, 0, 20\}];$

$z[t_] := D[Evaluate[x[t]/.ec1], t]$

$d1 = Plot[Evaluate[x[t]/.ec1], \{t, 0, 20\}];$

$d2 = Plot[Evaluate[z[t]], \{t, 0, 20\}, PlotStyle- > \{Dashing[\{0{,}01\}]\}]$

$Show[d1, d2]$

Out[1e]:=(ver las tres figuras siguientes).

En las figuras de salida se observa claramente que las amplitudes quedan acotadas y el comportamiento es pseudoperiódico, por lo tanto no hay resonancia.

Ejercicio 4.9. *Resuelve y representa gráficamente las soluciones de las ecuaciones*

1. $x'' + 10^{-3}x' + 3x = \cos(3t)$,
2. $x'' + 10^{-3}x' + 3x = \cos(5t)$,

con condiciones iniciales $x(0) = \frac{3}{2}$ *y* $x'(0) = 0$.

Se pide además dar la amplitud máxima de las vibraciones mirando la gráfica representada.

¿Encontráis el fenómeno de resonancia? Razona tu respuesta.

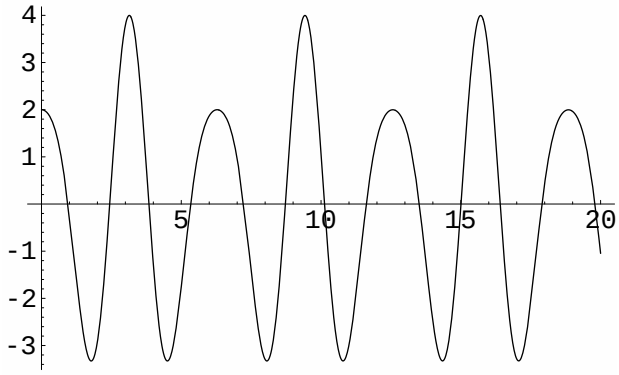


Figura 4.13: Out[1e]. Desplazamientos del muelle en cada instante

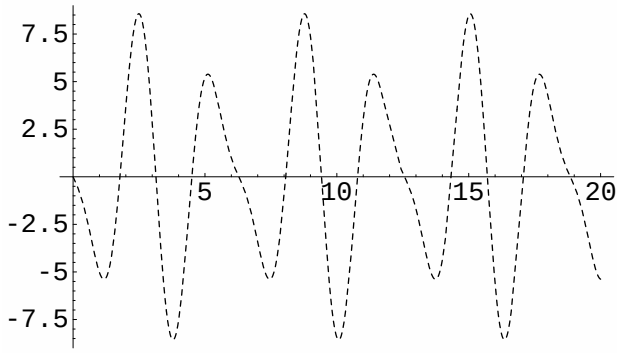


Figura 4.14: Out[1e]. Velocidad del muelle en cada instante

Conviene comentar la similitud de la ecuación 4.2 con la ecuación de un circuito eléctrico gobernado por la ecuación direrencial

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E_0 \cos(\omega t), \tag{4.3}$$

por lo que las consideraciones anteriormente hechas para el movimiento del carro o muelle se aplican a la cantidad de carga que fluye por un circuito eléctrico que satisfaga la ecuación 4.3.

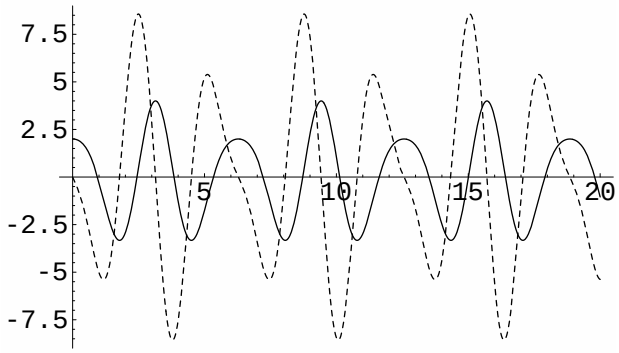


Figura 4.15: Out[1e]. Desplazamiento y velocidad del muelle en cada instante