



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ejercicios de Ampliación de Matemáticas Arquitectura Técnica Curso 2008/09.

Integrales en una variable

Ejercicio 1 *Calcula las siguientes primitivas:*

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}} dx.$ | 13. $\int x^2 \ln x dx.$ | 26. $\int \frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2} dx.$ |
| 2. $\int \frac{4x}{\sqrt{8-x^2}} dx.$ | 14. $\int x\sqrt{1+x} dx.$ | 27. $\int \frac{x^7+x^3}{x^4-1} dx.$ |
| 3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx.$ | 15. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$ | 28. $\int \frac{x-1}{x+1} dx.$ |
| 4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$ | 16. $\int \operatorname{tg} x dx.$ | 29. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3} dx.$ |
| 5. $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx.$ | 17. $\int (1+\operatorname{tg} x)^2 dx.$ | 30. $\int \frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)} dx.$ |
| 6. $\int \frac{x}{a^4-x^4} dx.$ | 18. $\int \sec x dx.$ | 31. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx.$ |
| 7. $\int \frac{1}{e^x+1} dx.$ | 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}.$ | 32. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}.$ |
| 8. $\int \operatorname{cosec} x dx.$ | 20. $\int \frac{\arcsen x}{x^2} dx.$ | 33. $\int \frac{dx}{x^3-1} dx.$ |
| 9. $\int \arcsen \sqrt{x} dx.$ | 21. $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}.$ | 34. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$ |
| 10. $\int \frac{5x^2}{\sqrt{x}} dx.$ | 22. $\int x^n \ln x dx.$ | 35. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$ |
| 11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} dx.$ | 23. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3} dx.$ | 36. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3-x}}.$ |
| 12. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx.$ | 24. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx.$ | 37. $\int \frac{\sqrt{4+3x}}{4-3x} dx.$ |
| 25. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx.$ | | |

Ejercicio 2 *Calcula el área encerrada por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ e $y = -x^2 + 3x - 1$.*

Ejercicio 3 *Halla el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \ln(x+5)$ y las rectas $y = 0$, $x = -\frac{9}{2}$ y $x = 1$.*

Ejercicio 4 *Calcula la siguiente integral:*

$$\int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx.$$

Calcula ahora el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje $y = 0$ en el intervalo $[0, 3]$. ¿Coincide este área con el valor de la integral anterior? ¿Por qué?

Ejercicio 5 *Calcula las siguientes integrales impropias:*

1. $\int_1^{\infty} e^x dx.$
2. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

Observa que ambas integrales dan lo mismo. ¿Podrías haber llegado a esa conclusión sin necesidad de calcularlas?

Soluciones

Ejercicio 1

1. $\frac{2}{9}\sqrt{x^3-1}(x^3+5)+C.$
2. $-4\sqrt{8-x^2}+C.$
3. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$
4. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsen x+C.$
5. $2\arctg\sqrt{1+x}+C.$
6. $\sqrt{14}a^2(-\ln(a-x)-\ln(a+x)+\ln(a^2+x^2))+C.$
7. $-\ln(1+e^{-x})+C.$
8. $\ln(\tg \frac{x}{2})+C.$
9. $\frac{2x-1}{2}\arcsen\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C.$
10. $2x^2\sqrt{x}+C.$
11. $\frac{1}{b}\arcsen\frac{bx}{a}+C.$
12. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\frac{x}{2}+C.$
13. $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C.$
14. $\frac{2}{5}(x+1)\sqrt{1+x}(x-\frac{3}{5}(1+x))+C.$
15. $\frac{e^x}{1+x}+C.$
16. $-\ln(\cos x)+C.$
17. $\tg x-2\ln\cos x+C.$
18. $\ln(\sec x+\tg x)+C.$
19. $\frac{1}{b}\operatorname{arcsec}\frac{bx}{a}+C.$
20. $-\frac{\arcsen x}{x}+\ln(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}})^{\frac{1}{2}}+C.$
21. $\arctg(\ln x)+C.$
22. Si $n \neq -1$ $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x-1]+C$, si $n = -1$ $\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$
23. $-\frac{3}{5\sqrt[3]{x^5}}-\frac{1}{2x^2}+C.$
24. $-\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}(\frac{x}{a})+C.$
25. $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6}+C.$
26. $-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x+1}+C.$
27. $\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{7}{4}\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$
28. $x-2\ln(x+1)+C.$
29. $-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{5}{x-1}+2\ln(x-1)+C.$
30. $\ln(x-3)+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctg(2x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}+C.$
31. $x-2\arctg x+C.$
32. $-\frac{1}{x}-\arctg x+C.$
33. $\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctg\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}+C.$
34. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}+4\arctg\sqrt[4]{x}+C.$
35. $2\arctg\sqrt{x}+C.$
36. $4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x})-1+C.$
37. $-\frac{2}{3}\sqrt{4+3x}+\frac{\sqrt{8}}{3}[\ln(\sqrt{8}+\sqrt{4+3x})+\ln(\sqrt{8}-\sqrt{4+3x})]+C.$

Ejercicio 2 $\frac{37}{12}.$

Ejercicio 3 $6\ln 6 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{9}{2} \simeq 5,9040.$

Ejercicio 4 $-\frac{9}{4}$ y $\frac{37}{12}.$

Ejercicio 5 $e-1.$