UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ampliación de Matemáticas, Arquitectura T., Curso 2008/09.

Integrales Múltiples

1. Integral doble
   - Integrales dobles sobre rectángulos
   - Integrales dobles sobre recintos generales
   - Integrales dobles en coordenadas polares
2. Integrales triples
   - Integrales triples en coordenadas esféricas
   - Integrales triples en coordenadas cilíndricas
3. Aplicaciones de las integrales múltiples

La integral doble

Integrales dobles sobre rectángulos

Supongamos que tenemos un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$R = [a, b]x[c, d] = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

y sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada y positiva definida en el rectángulo.

Consideramos particiones

$$\mathcal{P}_1 = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

y

$$\mathcal{P}_2 = \{c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n = d\}$$

de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente.

A partir de éstas obtenemos lo que se denomina *partición* del rectángulo R del siguiente modo

$$\mathcal{P}_1 x \mathcal{P}_2 = \{(x, y) : x \in \mathcal{P}_1, y \in \mathcal{P}_2\},$$

es decir, la partición $\mathcal{P}_1 x \mathcal{P}_2$ está formada por los puntos de la forma (x_i, y_j) donde $i = 0, 1, ..., n$ y $j = 0, 1, 2, ..., m$.

Esta partición permite dividir el rectángulo R en los siguientes subrectángulos

$$\{[x_{i-1}, x_i]x[y_{i-1}, y_i] : i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}$$

Se llaman *suma superior* y *suma inferior* de la función asociada a la partición a los siguientes valores

$$S(\mathcal{P}_1 x \mathcal{P}_2) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

y

$$s(\mathcal{P}_1 x \mathcal{P}_2) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

donde

$$M_{ij} = sup\{f(x,y) : (x,y) \in [x_{i-1}, x_i]x[y_{i-1}, y_i]\}$$

y

$$m_{ij} = inf\{f(x,y) : (x,y) \in [x_{i-1}, x_i]x[y_{i-1}, y_i]\}$$

Estas sumas representan dos números, el primero de ellos mayor o igual y el segundo menor o igual, respectivamente, que el volumen que encierra la superficie $z = f(x,y)$ y el plano $z = 0$ en R.

Si tomamos cada vez más puntos en las particiones, se observa que las sumas superiores y las inferiores se aproximan cada vez más, de hecho el conjunto de las sumas superiores de f asociadas a particiones de R está acotado inferiormente y el conjunto de las sumas inferiores de f asociadas a particiones de R está acotada superiormente.

Entonces se dice que f es *integrable Riemann* en R cuando el ínfimo del conjunto de las sumas superiores de f asociadas a particiones de R coincide con el supremo del conjunto de las sumas inferiores de f asociadas a particiones de R, llamando a este valor común *integral doble* de f en R, denotándolo por

$$\int\int_R \text{ ó por } \int\int_R f(x,y)dxdy$$

Esta integral representa gráficamente el volumen que la superficie $z = f(x,y)$ y el plano $z = 0$ encierran en el rectángulo R (contando los signos adecuadamente) y puede calcularse por los siguientes límites

$$\lim_{n\to+\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to+\infty} s(\mathcal{P}_n)$$

donde $(\mathcal{P}_n)$ es una sucesión de particiones que cumplen que el área de todos los rectángulos de la partición tiende a cero.

Otra condición equivalente a que f sea integrable en R es que exista un único número I que cumpla la condición $s(\mathcal{P}) \leq I \leq S(\mathcal{P})$ para cualquier partición $\mathcal{P}$. De hecho dicho número será la integral $\int\int_R f$.

Proposición

Si una función f es continua en un rectángulo, entonces es integrable en dicho rectángulo.

Teorema (Fubini)

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua en el rectángulo $R = [a,b]x[c,d]$. Entonces

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

Nota:

Además, para funciones del tipo $f(x,y) = g(x)h(y)$, la integral sobre un rectángulo $R = [a,b]x[c,d]$ puede calcularse del siguiente modo

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = (\int_a^b g(x)dx)(\int_c^d h(y)dy)$$

Integrales dobles sobre recintos generales

Consideramos una región acotada D en $\mathbb{R}^2$, y un rectángulo R de $\mathbb{R}^2$ que contenga a dicha región.

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función sobre D, podemos considerar la nueva función $F : R \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in D \\ 0 & si\ (x,y) \notin D \end{cases}$$

En esta situación, diremos que f es integrable sobre la región acotada D si F es integrable sobre el rectángulo R, y definiremos en tal caso la integral doble de f en D como

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_R F(x,y)dxdy$$

Proposición

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un recinto acotado, $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones integrables en D, y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\lambda f + \mu g$ es integrable en D, y

$$\int\int_D (\lambda f + \mu g)(x,y)dxdy = \lambda \int\int_D f(x,y)dxdy + \mu \int\int_D g(x,y)dxdy$$

2. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ entonces

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq \int\int_D g(x,y)dxdy$$

3. Si $D = D_1 \cup D_2$ con D_1, D_2 disjuntos, entonces

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Definición

Un dominio acotado $D \subset \mathbb{R}^2$ se denomina un recinto básico si su frontera está compuesta por un conjunto finito de curvas continuas de la forma $y = g(x)$ ó $x = h(y)$

Teorema

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un recinto básico y $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en D, entonces f es integrable sobre D.

Los tipos especiales de recintos básicos con los que trabajaremos son los siguientes:

Definición

Un recinto $D \subset \mathbb{R}^2$ se dice de tipo I si es de la forma

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde $a < b \in \mathbb{R}$, y $g_1(x), g_2(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Un recinto $D \subset \mathbb{R}^2$ se dice de tipo II si es de la forma

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde $c < d \in \mathbb{R}$, y $h_1(y), h_2(y) : [c, d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

nota:

existen recintos básicos que son simultáneamente de tipo I y de tipo II, llamados de tipo III.

Teorema (Fubini)

Si $f(x, y) : D \to \mathbb{R}$ es continua en un recinto de tipo I, $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy)dx$$

Si $f(x, y) : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ es continua en un recinto de tipo II,$\widetilde{D} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, entonces

$$\int\int_{\widetilde{D}} f(x, y)dxdy = \int_c^d (\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx)dy$$

Aplicaciones fundamentales de la integral doble sobre recintos básicos

1. El volumen del sólido S situado sobre la región $D \subset \mathbb{R}^2$ y por debajo de la superficie $z = f(x, y)$, con $f(x, y) \geq 0$, es

$$Vol(S) = \int\int_D f(x, y)dxdy$$

2. El área del recinto básico $D \subset \mathbb{R}^2$ es

$$Area(D) = \int\int_D dxdy$$

ya que

$$\int\int_D dxdy = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy)dx = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx = Area(D)$$

(área de una región plana)

Integrales dobles en coordenadas polares

nota:

Se suele utilizar cuando existe dificultad de la integración, complejidad en la función, ó en el recinto de integración.

Ejemplo: La media corona circular:

en coordenadas euclídeas: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

en coordenadas polares: $\{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

es decir, dicha corona es un rectángulo polar, una región plana que en coordenadas polares es un producto de intervalos $[r_1, r_2]x[\theta_1, \theta_2]$

Teorema (Cambio de variable)

Sea $T : U \to V$ una aplicación de clase C^1 entre dos recintos básicos U, V de $\mathbb{R}^2$ de modo que

1. T es biyectiva

2. $\|J(T)\| \neq 0$ en todo punto de U, entonces si $f : V \to \mathbb{R}$ es una función continua se tiene que
$$\int\int_V f(x, y)dxdy = \int\int_U f(T(u, v))|J(T)\|dudv$$

En particular, si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo polar $f : D \to \mathbb{R}$ es continua, se verifica

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_{r_1}^{r_2} (\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(rcos\theta, rsen\theta)rd\theta)dr,$$

pudiéndose efectuar la integración iterada en el orden inverso.

Más aún, si consideramos una región plana $D \subset \mathbb{R}^2$ que se expresa en coordenadas polares de la forma
$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\}$$
siendo $h_1(r), h_2(r) : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y $f : D \to \mathbb{R}$ es continua sobre D, entonces se tiene que
$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_a^b (\int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(rcos\theta, rsen\theta)rd\theta)dr,$$
análogamente, si suponemos que,

$$D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\},$$

nos quedaría la fórmula

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta (\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(rcos\theta, rsen\theta)rd\theta)dr,$$

Integrales triples

Sobre un paralelepípedo rectangular (çaja")

La forma de construir la integral triple y sus propiedades son muy similares a las de la integral doble. La diferencia entre ambas integrales es que la integral doble se construye para funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ sobre rectángulos mientras que la integral triple se construye para funciones definidas en $\mathbb{R}^3$ sobre paralelepípedos rectangulares de la forma

$$R = [a,b]x[c,d]x[r,s] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

notación:

$$\int_R f, \int_R f(x,y,z)dV, \int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz$$

Teorema de Fubini

Sea $R = [a,b]x[c,d]x[r,s]$ un paralelepípedo rectangular y sea $f : R \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

siendo la igualdad cierta también al realizar en orden distinto las integrales iteradas.

Sobre regiones más generales

Definición

Diremos que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ es una región de tipo I si se puede escribir de la forma:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\},$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, \phi_1$ y ϕ_2 son funciones continuas.

También será de tipo I si se puede escribir

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\},$$

Diremos que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ es una región de tipo II si se puede escribir de alguna de las dos formas anteriores intercambiando los papeles de x y de z

De forma análoga para región de tipo III si se intercambian los papeles de y y de z.

Una región que sea de los tipos I, II, III a la vez se denomina de tipo IV.

Denominaremos *región elemental* a cualquiera de las regiones que acabamos de definir.

Teorema

Sea

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\},$$

una región una región de tipo I, y sea $f : D \to \mathbb{R}$, continua en D. Entonces

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

nota:

la integral sobre cualquier otro tipo de región elemental se calcula de forma análoga a la del teorema anterior.

Interpretación más básica de la integral triple

Si $B \subset \mathbb{R}^3$ es una región de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera está compuesta por curvas y superficies continuas, entonces el volumen de dicha región es

$$Vol(B) = \int\int\int_B dxdydz$$

Cambio de variable

Teorema (Cambio de variable):

Sea $T : U \to V$ una aplicación de clase C^1 entre dos recintos básicos U, V de $\mathbb{R}^3$ de modo que

1. T es biyectiva
2. $\|J(T)\| \neq 0$ en todo punto de U, entonces si $f : V \to \mathbb{R}$ es una función continua se tiene que
$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_U f(T(u,v,w))\|J(T)\|dudvdw$$

Existen dos cambios de variable en $\mathbb{R}^3$ que se consideran los más importantes. Ambos están inspirados en el cambio a coordenadas polares de $\mathbb{R}^2$, al cual generalizan en dos direcciones distintas, y son las siguientes:

Cambio a coordenadas cilíndricas

Este cambio viene dado por las ecuaciones

$$x = \rho cos\theta$$

$$y = \rho sen\theta$$

$$z = z$$

donde ρ, $(\rho \geq 0)$ representa la distancia del punto (x,y,z) al eje OZ, (o lo que es lo mismo, distancia del punto (x,y) al origen).

y θ, $(\theta \in [0, 2\pi])$ el ángulo que forma el vector (x,y) con el eje OX

El módulo del determinante Jacobiano del cambio es

$$\|det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right)\| = \|det\begin{pmatrix} cos\theta & -\rho sen\theta & 0 \\ sen\theta & \rho cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \|rho\| = \rho$$

resumiendo:

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_U f(\rho cos\theta, \rho sen\theta, z)\rho d\rho d\theta dz$$

Cambio a coordenadas esféricas

Este cambio viene dado por las ecuaciones

$$x = \rho sen\phi cos\theta$$

$$y = \rho sen\phi sen\theta$$

$$z = \rho cos\phi$$

donde ρ, ($\rho \geq 0$) representa la distancia del punto (x, y, z) al origen,
θ, ($\theta \in [0, 2\pi]$) el ángulo que forma el vector (x, y) con el eje OX
y ϕ, ($\phi \in [0, \pi]$) el ángulo que forma el vector (x, y, z) con el eje OZ
El módulo del determinante Jacobiano del cambio es

$$\|det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right)\| = \|det\begin{pmatrix} sen\phi cos\theta & -\rho sen\phi sen\theta & -\rho cos\phi cos\theta \\ sen\phi sen\theta & \rho sen\phi cos\theta & \rho cos\phi sen\theta \\ cos\theta & 0 & -\rho sen\phi \end{pmatrix} = \|-\rho^2 sen\phi\| = \rho^2\|sen\phi\|$$

resumiendo:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_D^* f(\rho sen\phi cos\theta, \rho sen\phi sen\theta, \rho cos\phi)\rho^2 sen\phi d\rho d\theta dz$$

Aplicaciones

1. Área de un recinto plano R

$$\int\int_R 1 * dxdy$$

2. Volumen del sólido encerrado por la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y el plano $z = 0$ a través del recinto R (bidimensional), $f : R \to \mathbb{R}$ función continua

$$\int\int_R f(x,y)dxdy$$

3. Volumen de un sólido tridimensional S

$$\int\int\int_S 1 * dxdydz$$

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una lámina pesada dotada de una función de densidad de masa $\rho(x, y)$. Entonces

4. La masa total de la lámina pesada es

$$m = \int\int_D \rho(x,y)dxdy$$

5. El centro de masas de D es (X_m, Y_m),siendo

$$X_m = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)dxdy$$

$$Y_m = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x,y)dxdy$$

6. Los momentos de inercia de D respecto de los ejes x e y son respectivamente

$$I_x = \frac{1}{m} \int \int_D y^2 \rho(x,y) dxdy$$

$$I_y = \frac{1}{m} \int \int_D x^2 \rho(x,y) dxdy$$

el momento central con respecto al origen es

$$I_o = \frac{1}{m} \int \int_D (x^2 + y^2) \rho(x,y) dxdy$$

Unas aplicaciones análogas se obtienen cuando en lugar de una lámina pesada consideramos un sólido pesado $B \subset \mathbb{R}^3$ con función de densidad $\rho(x,y,z)$

Con respecto a otros tipos de densidades, podemos considerar que una carga eléctrica está distribuida sobre una región D, y con densidad de carga (en unidades de carga partido por unidad de área) está dada por $\sigma(x,y)$ en un punto (x,y) de D.

7. Entonces, la carga total de Q de la lámina es:

$$Q = \int \int_Q \sigma(x,y) dxdy$$

8. Dada una función $f(x,y) : D \to \mathbb{R}$ sobre un recinto básico D, definimos su valor promedio como

$$Prom(f,D) = \frac{1}{Area(D)} \int \int_D f(x,y) dxdy$$

Así, dependiendo de la magnitud f que queramos considerar, obtendremos diversas aplicaciones:

por ejemplo:

Si $T(x,y)$ es una distribución de temperatura sobre una lámina caliente D, el valor promedio de la temperatura sobre D viene dada por $Prom(T,D)$.