Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante un método iterativo de cuarto orden

Los ceros de una ecuación no lineal $F(x) = 0$ no pueden hallarse de forma cerrada. Para obtener aproximaciones a las soluciones de dichas ecuaciones pueden utilizarse métodos iterativos. Comenzando de una aproximación inicial, x_0, son evaluadas sucesivas aproximaciones x_i, $i = 1, 2, \dots$, con ayuda de cierta función de iteración $\Phi : X \to X$,

$$x_{n+1} := \Phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{1}$$

En este trabajo estamos interesados en la solución de *ecuaciones cuadráticas*,

$$F^{''}(x) = B,$$

donde B es una forma bilineal constante. Este es un ejemplo donde los métodos de alto orden son una buena alternativa a métodos tipo Newton. Un caso particular de estas ecuaciones que aparecen en gran cantidad de aplicaciones, son las ecuaciones de Riccati. Por otra parte, los métodos de tercer orden se escriben como

$$x_{n+1} = x_n - \left(I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + O(L_F(x_n)^2)\right) F^{'}(x_n)^{-1}F(x_n),$$

donde $L_F(x_n) = F^{'}(x_n)^{-1}F^{''}(x_n)F^{'}(x_n)^{-1}F(x_n)$.

En particular, cada iteración de un método de tercer orden estará entre dos C-métodos,

$$x_{n+1} = x_n - \left(I + \frac{1}{2}L_F(x_n) + CL_F(x_n)^2\right) F^{'}(x_n)^{-1}F(x_n). \tag{2}$$

En este estudio, presentamos y analizamos un C-método con orden cuatro de convergencia para ecuaciones cuadráticas. La ventaja de este método es que los diversos sistemas lineales auxiliares que han de resolverse en cada iteración están asociados a la misma matriz. Este hecho hace que el método propuesto sea computacionalmente competitivo. Obtenemos un teorema de convergencia semilocal a partir de la α-teora. Finalmente, compararemos numéricamente el método introducido con diversos métodos clásicos.