Convergencia global para los métodos de Steffensen y de Chebyshev

Consideramos el problema de encontrar los ceros de una función dada $f(x)$. Para aproximar la solución de estas ecuaciones podemos usar métodos iterativos. El más estudiado es el método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

Su interpretación geométrica es bien conocida, dada una iteración x_n, la siguiente iteración es el cero de la recta tangente

$$y(x) - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

a la gráfica de f en $(x_n, f(x_n))$.

En este trabajo se estudian los métodos de Steffensen y de Chebyshev. Veremos que estos métodos admiten una interpretación geométrica similar a la de Newton. A partir de dicha interpretación se obtendrán condiciones suficientes para su convergencia global. Se compararán dichas condiciones con la de métodos más conocidos como el de Halley.

Los teoremas de convergencia son:

Teorema Sea f'' una función continua en un intervalo J, conteniendo una raz x^* de f . Supongamos que $f' \neq 0$ y que $f'' \geq 0$ o $f'' \leq 0$ en J. Entonces los métodos tipo Steffensen convergen monótonamente a x^* a partir de cualquier punto $x_0 \in J$ tal que $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$.

Teorema Sea f''' una función continua en un intervalo J conteniendo una raz x^* de f. Supongamos que $f' \neq 0$, y que $\left((\frac{\eta}{f'(x)})^2\right)'' \geq 0$ en J, donde $\eta = sgn(f')$. Entonces el método de Chebyshev converge monótonamente a x^* a partir de cualquier punto $x_0 \in J$.