Una mejora del método de Steffensen en espacios de Banach

Resumen

En este artículo se presenta una generalización del método de Steffensen para la resolución de ecuaciones no lineales sin usar derivadas. Se establece un teorema de existencia-convergencia bajo condiciones tipo Kantarovich. Finalmente, se compara numéricamente el método introducido con los métodos clásicos.

Sin usar para ello ninguna derivada, el método de Steffensen proporciona convergencia cuadrática en la localización de un punto fijo de una función real. Este método puede ser considerado como una simplificación del método de Newton en la cual se reemplaza la derivada $f'(x_k)$ por la siguiente expresión:

$$\frac{f((f(x_k) - x_k) + x_k) - f(x_k)}{f(x_k) - x_k} = \frac{f(f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k) - x_k}. \tag{1}$$

Chen [3] generaliza este método para operadores entre espacios de Banach obteniendo la expresión:

$$x_{k+1} = x_k + (I - [F(x_k), x_k; F])^{-1}(F(x_k) - x_k), \tag{2}$$

donde $[\cdot, \cdot; F]$ es el operador diferencia dividida asociado a $F : X \to X$ (X un espacio de Banach).

A pesar de tener el mismo orden de convergencia que Newton, el número de iteraciones que se necesitan suele ser considerablemente superior en la práctica; el motivo radica en el tamaño de $|f(x_k) - x_k|$ que en las primeras iteraciones no es lo suficientemente pequeño. Así, la aproximación de la derivada no es buena y el método se ralentiza. Cabe notar que a medida que x_k se aproxima a x^*, el valor de $|f(x_k) - x_k|$ se aproxima a cero (continuidad de f) y la aproximación a la derivada gana en exactitud (teóricamente). En este trabajo consideraremos una modificación del método original de Steffensen que permite controlar la calidad de la aproximación de la derivada y así obtener un método competitivo con Newton. La idea es considerar como nueva aproximación:

$$\frac{f(\alpha_k(f(x_k) - x_k) + x_k) - f(x_k)}{\alpha_k(f(x_k) - x_k)} \tag{3}$$

donde $\alpha_k \in (0, 1]$ sirve de control de la calidad de la aproximación, pudiendo ser lo suficientemente pequeño cuando $|f(x_k) - x_k|$ no lo es.

El método en espacios de Banach admite la forma:

$$x_{k+1} = x_k + (I - [\alpha_k(F(x_k) - x_k) + x_k, x_k; F])^{-1}(F(x_k) - x_k). \tag{4}$$

Se establecerá un teorema de convergencia tipo Kantarovich con análogas hipótesis de Johnson y Scholz en [4] para nuestro método. Estas hipótesis son más débiles que las exigidas por Chen en [3]. Además las restricciones para el operador F y para x_0 son menores en el método introducido en comparación con las necesarias para el método clásico de Steffensen ($\alpha_k = 1, \forall k$) [4].

Finalmente presentaremos distintos experimentos numéricos donde testaremos el método introducido comparándolo con los métodos clásicos.

Referencias

[1] S.Busquier, "Métodos numéricos de alto orden para la resolucion de ecuaciones no lineales". Valencia GrAN Report, (2000).

[2] D.Chen, "On the convergence of a class of generalized Steffensen's iterative procedures and error analysis", Intern. J. Computer Math., 31,(1989), 195-203.

[3] K-W.Chen, "Generalization of Steffensen's method for operator equations", Comment.Math.Univ.Carolina, 2 (1964), pp. 47-77.

[4] L.W.Jhonson and R.Scholz, "On Steffensen's method", SIAM J.Numer.Anal. vol.5, No.2, June 1968.

[5] L.V.Kantarovich and G.P.Akilov, "Functional Analysis in Normed Spaces". Ed. Oxford: Pergamon (1964).

[6] G.J.Miel, "The Kantarovich Theorem with Optimal Error Bounds". Amer.Math. Monthly, 86, 212-215 (1979).

[7] J.M.Ortega and W.C.Rheinboldt, "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Banach Spaces". Ed. New York: Academic Press (1970).

[8] J.W. Schmidt, "Eine Übertragung der Regulä Falsi auf Gleichungen in Banachräumen". Z.Angew.Math.Mech.,43 (1963), pp. 1-8, 97-110.

[9] A.Y.Taylor and D.Lay, "Introduction to Functional Analysis". 2nd. Ed. New York: J. Wiley (1980).