Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Variable Compleja y Transformadas
Hoja 2
Funciones de Variable Compleja

1. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Calcula y representa el conjunto $f(D)$ para:

   a) $f(z) = 3 + i + z$ b) $g(z) = (1+i)z$ c) $h(z) = 1/z$

2. Encuentra la parte real y la parte imaginaria de las funciones:

   a) $f(z) = 3z^2 - iz$ b) $g(z) = \bar{z} + \frac{1}{z}$ c) $h(z) = z^3 + z + 1$

   d) $k(z) = \frac{1-z}{1+z}$ e) $l\,(z) = z^2 + i$ f) $m\,(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

   g) $n\,(z) = \cosh\,(z - i)$ h) $o\,(z) = \tan z$

3. Las funciones $Re\,(z)\,/z$, $z/|z|$, $Re(z^2)/|z|^2$, $(z\,Re\,(z))\,/|z|$ están definidas sobre $\mathbb{C} - \{0\}$. ¿Cuáles de ellas pueden definirse en $z = 0$ de forma que sean continuas?

4. Estudia los puntos en los que no están definidas las funciones

   a) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *b)* $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1/2}$ *c)* $f(z) = \dfrac{1+z^2}{z-i}$

   d) $f(z) = e^{-1/z}$ *e)* $f(z) = \dfrac{z^5+1}{z^2+4}$ *f)* $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-3)}$

   g) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ *h)* $f(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ *i)* $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

5. Calcula los siguientes valores

   a) e^i *b)* e^{-1+i} *c)* $e^{2-i\pi/2}$ *d)* $e^{L_{\pi-3}(1-i)}$

   e) $\operatorname{sen}(3i)$ *f)* $\operatorname{sen}(1+i)$ *g)* $\cos(-2i)$ *h)* $\cos(-1-i)$

6. Calcula

   a) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^i$ b) i^{i^i} c) $(1+i)^{e^{-i}}$

7. Calcula la parte imaginaria de $i^{\log i}$.

8. Calcula para $\theta = \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{4}, 0, \pi$, el valor de los siguientes logaritmos:

   a) $L_\theta(3i)$ *b)* $L_\theta(-2i)$ *c)* $L_\theta(1+i)$ *d)* $L_\theta(-1-i)$ *e)* $L_\theta(-1)$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones

   a) $e^z + i = 0$ b) $4\cos z + 5 = 0$

   c) $\operatorname{sen} z = 4$ d) $e^{-z} + 1 = 0$

   e) $2\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z + \coth^2 z = 2$) f) $\cosh^2 z - 3\operatorname{senh} z + 1 = 0$

   g) $2\cos z - i \operatorname{sen} z = i$ h) $2\operatorname{sen} z - i\cos z = i$

   i) $e^z = 1 + i$ j) $\cos z = 4$

10. Demuestra que si $z = x + iy$, entonces $|e^z| = e^x$ y $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

11. Comprueba que la función $f(z) = e^{-1/z}$ es continua en el abierto

    $$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

    ¿Puede extenderse a $z = 0$ de forma continua?

12. Prueba que para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es:

    a) $|\operatorname{senh} y| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \cosh y$ b) $|\operatorname{senh} y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$

13. Dado el número complejo $z \in \mathbb{C}$, prueba que: $ze^z + \bar{z}e^{\bar{z}} \in \mathbb{R}$

14. Calcula los valores de α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ para que sea entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) e identifica como función de z la función

    $$f(z) = \operatorname{Re} z + \alpha \cdot \operatorname{Im} z + i(\beta \cdot \operatorname{Re} z + \gamma \cdot \operatorname{Im} z)$$

15. Halla los puntos donde las siguientes funciones son derivables:

    a) $f(z) = \left|\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2\right| + 2\,i\,|\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)|$ b) $f(z) = z\operatorname{Im}(z)$

16. Sean $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y convexo y $f : D \to \mathbb{C}$ una función con $f(z), \bar{f}(z) \in \mathcal{H}(D)$. Demuestra que f es constante en D.

17. Estudia si las siguientes funciones definidas en $\mathbb{C}$ son holomorfas y en caso afirmativo calcula $f'(z)$

    a) $f(z) = \overline{z}\,\mathrm{Im}\, z$ b) $f(z) = z\,\mathrm{Im}\, z$ *c*) $f(x+iy) = e^{-y}e^{ix}$

    d) $f(z) = z \cdot \overline{z}$ *e*) $f(z) = (z^2-2)e^{-z}$ *f*) $f(x+iy) = e^{y}e^{ix}$

    g) $f(z) = (z^2+\cos z)e^{z}$ *h*) $f(z) = \mathrm{sen}\,(2z+i)$ *i*) $f(x+iy) = xy + iy$

    j)$f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

18. Prueba que:

    (a) Si v y V son armónicas conjugadas de una misma función u en D, entonces v y V difieren a los sumo en una constante.

    (b) Si v es armónica conjugada de u en D y u es armónica conjugada de v, entonces u y v han de ser constantes en D.

19. Expresa $\mathrm{Re}\left(e^{1/z}\right)$ en términos de x e y y prueba que esta función es armónica en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

20. Sea $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función entera, siendo $u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Explica por qué las funciones $U(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y)$ y $V(x,y) = e^{u(x,y)}\,\mathrm{sen}\, v(x,y)$ son armónicas en D, y porqué $V(x,y)$, es de hecho, una armónica conjugada de $U(x,y)$.

21. Dada una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa en el abierto D, se define la aplicación $\phi(z) = |f(z)|^2$. Comprueba que se verifica la igualdad:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(z) = 4\,|f'(z)|^2 \quad \forall z \in D$$

22. Calcula, a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann, las derivadas de las funciones

    a) $f(z) = e^z$ *b*) $f(z) = \mathrm{sen}\, z$ *c*) $f(z) = \cos z$ *d*) $f(z) = ize^z$

23. Identifica como función $f(z)$ la función holomorfa

$$f(x+i\cdot y) = -2 - x^2 - y - 4xy + y^2 + i\cdot(1 + x + 2x^2 - 2xy - 2y^2).$$

24. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra las correspondientes funciones holomorfas $f(x+i\cdot y) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ e identifícalas como funciones $f(z)$.

    a) $u(x,y) = 2x(1-y)$ *b*) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

    c) $u(x,y) = 2e^x \cos y$ *d*) $u(x,y) = y/(x^2+y^2)$

    e) $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$ *f*) $u(x,y) = \arctan y/x$

    g) $v(x,y) = 4x - 4x^2 - 3y - 2xy + 3x^2y + 4y^2 - y^3$ h) $u(x,y) = \mathrm{senh}\, x\, \mathrm{sen}\, y$

25. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra la correspondiente función holomorfa $f(x+i\cdot y) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ e identifícala como función $f(z)$.

    a) $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$ con $f(\pi) = 1/\pi$

    b) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ con $f(i) = 2i - 1$

    c) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ con $f(1) = 1$

    d) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$ con $f(2-i) = -8i$

    e) $u(x,y) = 2\,\mathrm{sen}\, x \cosh y - x$ con $f(0) = 0$

26. Estudia qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ hacen que las siguientes funciones sean armónicas, cuando lo sean encuentra las correspondientes funciones holomorfas $f(x+i\cdot y) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ e identifícalas como funciones $f(z)$.

    a) $u(x,y) = a\cdot x^2 + b\cdot y^2 - xy + 2x + 3y - 1$

    b) $v(x,y) = ax^3y - 4xy^3$ *c*) $u(x,y) = x^3 + axy^2$

    d) $u(x,y) = y^3 + ax^2y$ *e*) $v(x,y) = ax^3 - 4xy^3$