



Variable Compleja y Transformadas
Hoja 1
El Cuerpo de los números Complejos

1. Dados los números complejos $z_1 = -2 - i$ y $z_2 = -4 + i$, calcula
 - a) $z_1 + z_2$
 - b) $3z_1 - 2z_2$
 - c) $z_1 z_2$
 - d) $(z_2)^{-1}$
 - e) $\frac{z_1}{z_2}$
2. Dados los números complejos $z_1 = 6i$ y $z_2 = 8 - i$, calcula
 - a) $z_1 z_2$
 - b) $\frac{z_1}{z_2}$
 - c) $\frac{z_2}{z_1}$
 - d) $z_2^2 - z_1$
3. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1 + i)(x + iy) = i$
4. Calcula el módulo de los números complejos:
 - a) $3 + 4i$
 - b) $\frac{1+i}{1-i}$
 - c) $i^7 + i^{10}$
 - d) $1 + i + i^2$
5. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:
 - a) $2i$
 - b) $-3i$
 - c) -1
 - d) 3
 - e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
 - f) $-3 + i\sqrt{3}$
 - g) $\frac{1+i}{1-i}$
 - h) $i^7 + i^{10}$
 - i) $3 + 3i$
 - j) $1 + i + i^2$
6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:
 - a) $(1 + i)^3$
 - b) $\frac{2+3i}{3-4i}$
 - c) $i^5 + i^{16}$
 - d) $1 + i + i^2 + i^3$
 - e) $\frac{1}{i}$
 - f) $(1 + i\sqrt{3})^3$
 - g) $2_{\pi/2}$
 - h) $1_{\pi/4}$
 - i) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$
 - j) $(2 + 2i)^2$
 - k) $(2 - 2i)^2$
 - l) $(2 + 2i)(2 - 2i)$
 - m) $e^{-i\pi/2}$
 - n) $2e^{-i\pi}$
 - ñ) $3e^{-i\pi/2}$
 - o) $2e^{-i\pi/4}$
 - p) $i + 3e^{i2\pi}$
 - q) $e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}$
 - r) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$
 - s) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

7. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $ z = 1$ | b) $ z \leq 1$ | c) $z + \bar{z} \leq 1$ |
| d) $z - \bar{z} = i$ | e) $\text{Im}(z) < 0$ | f) $ \text{Re}(z) < 1$ |
| g) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = z\bar{z}$ | h) $ z ^{-1} \geq 1, (z \neq 0)$ | i) $ z - 5i = 8$ |
| j) $\text{Im}(z^2) > 2$ | k) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ | l) $\text{Re}(z^2 - z) = 0$ |
| m) $ z - 2 = 1 - 2\bar{z} $ | n) $2 < z < 3$ | ñ) $\left \frac{z-1}{z+1}\right \leq 1$ |
| o) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ | p) $z + \bar{z} \geq z ^2$ | |

8. Comprueba que para cada par $z, \omega \in \mathbb{C}$ se verifican las relaciones siguientes:

- (a) $|z - \omega| \geq ||z| - |\omega||$
- (b) $|z - \omega|^2 + |z + \omega|^2 = 2(|z|^2 + |\omega|^2)$
- (c) $|1 - \bar{z} \cdot \omega|^2 - |z - \omega|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |\omega|^2)$

9. Calcula las siguientes potencias de números complejos

- a) $(1 + i)^{100}$
- b) $(-1 + \sqrt{3}i)^{30}$
- c) $(\sqrt{1-i})^{10}$
- d) $\frac{1}{(1-i)^5}$

10. Calcula las siguientes raíces:

- | | | | |
|---------------------|--------------------------------|--------------------|----------------------|
| a) $\sqrt[3]{1}$ | b) $\sqrt[3]{i}$ | c) $\sqrt[6]{-8}$ | d) $\sqrt[4]{-1}$ |
| e) $\sqrt[8]{1}$ | f) $\sqrt{1-i}$ | g) $\sqrt{3+3i}$ | h) $\sqrt[3]{-2+2i}$ |
| i) $\sqrt[3]{-1+i}$ | j) $\sqrt[4]{-8(1-\sqrt{3}i)}$ | k) $\sqrt[4]{-81}$ | l) $\sqrt[4]{1}$ |

11. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones:

- (a) $z^2 + 1 = 0$
- (b) $z^3 + 2 = 0$
- (c) $z^5 + 64 = 0$
- (d) $(z^2 + 4)(z - 1)^2 = 0$

12. Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ y $\text{Re}(z) \neq 0$, entonces $|z| = 1 \iff \text{Re}(z) = \text{Re}(z^{-1})$

13. Sea $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio con coeficientes reales ($a_j \in \mathbb{R}$).

- (a) Comprueba que para cada $z \in \mathbb{C}$, se cumple la igualdad $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$.
- (b) Usando el apartado anterior, prueba que si z_0 es solución compleja de $p(z) = 0$, entonces su conjugado \bar{z}_0 también es solución.
- (c) Sabiendo que $z = i$ es una raíz del polinomio $p(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z - 2$, calcula todas sus raíces.
- (d) Calcula todas las raíces del polinomio, $q(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$.

14. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $(1 + i)^{2/3}$ b) $(1 + \sqrt{3}i)^{3/4}$

15. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$

16. ¿En qué vector se transformará el complejo $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes?. ¿Qué ángulo se necesita para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?

17. Expresa en forma trigonométrica los números complejos siguientes

a) $-\frac{1}{2}i$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $\sqrt{3}$ d) $-i$ e) $-\frac{1}{2}$

18. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\sin(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\sin(x)$

19. Resuelve en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones:

(a) $z^2 - (6 + i)z + (7 + 9i) = 0$

(b) $z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0$

(c) $z^4 + z^2 + 1 = 0$

20. Halla las cuatro raíces de $z^4 + 4 = 0$ y úsalas para factorizar $z^4 + 4$ como producto de dos polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

21. Siendo z, w dos números complejos distintos y $\frac{(z + w)i}{(z - w)} \in \mathbb{R}$. Encuentra la relación entre $|z|$ y $|w|$.

22. Encuentra los números complejos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

23. Resuelve: $\bar{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

24. Demuestra la *identidad de Lagrange*, para se verifica

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

25. Resuelve las siguientes cuestiones:

- (a) Demuestra que todo número complejo z distinto de 1, pero con módulo 1, se puede expresar como

$$z = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}$$

- (b) Sean z_1, z_2 y z_3 tres complejos con $|z_j| = 1$, tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Prueba que al menos uno debe ser igual a 1.

- (c) Encuentra 3 complejos z_1, z_2 y z_3 de módulo 1 que verifiquen:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$$

26. Prueba que si z_1, z_2 y z_3 son tres complejos que verifican

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

entonces forman en el plano un triángulo equilátero.