



Apellidos:

Nombre:

Grupo:

DNI:

---

(Resuelve y entrega al menos 3 de los problemas que se detallan a continuación)

1. Calcula todos los números complejos  $z$  para los cuales  $(1+z)(1-z)^{-1}$  es
  - (a) Un número real.
  - (b) Un número imaginario puro.
2. Comprueba que salvo que  $z = x + iy$  sea un número real negativo, existe un único  $w$ , con  $\operatorname{Re}(w) > 0$  tal que  $w^2 = z$ .
3. Comprueba que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\left| a + \sqrt{a^2 - b^2} \right| + \left| a - \sqrt{a^2 - b^2} \right| = |a + b| + |a - b|$$

4. Prueba la siguiente identidad

$$\left| z_1 \left( 1 + |z_2|^2 \right) - z_2 \left( 1 + |z_1|^2 \right) \right|^2 = |z_1 - z_2|^2 |1 - z_1 \bar{z}_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)^2$$

5. Prueba la siguiente identidad

$$|1 - z_1 \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2) (1 - |z_2|^2)$$

6. Teniendo en cuenta el producto de los dos números complejos  $z_1 = 1 + ia$  y  $z_2 = 1 + ib$ , comprueba que

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Utiliza la fórmula anterior para demostrar que

$$\pi = 4 \left[ \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

7. Los tres números complejos  $z_1 = 3 + 4i$ ,  $z_2 = 1$  y  $z_3 = i$ , determinan un triángulo en el plano complejo. Al hacer girar el triángulo  $\pi/6$  radianes alrededor del origen, ¿cuáles serán los complejos correspondientes a los nuevos vértices? Haz una representación gráfica del problema.
8. Hallar dos números complejos tales que su suma es  $1 + 4i$ , su cociente es imaginario puro, y la parte real de uno de ellos es  $-1$ .
9. Calcula para  $n \in \mathbb{N}$  el valor de la siguiente operación

$$\left( 1 + \sqrt{3}i \right)^n + \left( 1 - \sqrt{3}i \right)^n$$

10. Suponiendo que  $z \in \mathbb{C}$ , con  $|z| = 1$ , calcula el valor de  $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$ .

11. Sea  $z \in \mathbb{C}$ , que cumple

$$\left| z - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

Si definimos

$$w = \frac{2 - 3z}{4z - 3}$$

calcula

$$\left| w + \frac{3}{4} \right|$$

12. Dada la ecuación

$$z^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{3}i)z + p = 0$$

suponiendo que una de las raíces es  $z_1 = -1 + i$ , calcula el valor de  $p$  y la otra raíz.

13. Prueba que si  $z \in \mathbb{C}$ , con  $\text{Im}(z) \neq 0$ , entonces

$$\frac{z}{1 + z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$$

Demuestra que si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\left( \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right)^n = \frac{1 + i \tan(n\theta)}{1 - i \tan(n\theta)}$$

14. Teniendo en cuenta que para  $n \in \mathbb{N}$ , y  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (\text{Suma progresión geométrica})$$

demuestra que la suma de los  $n$  valores de  $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$  es cero para  $n \geq 2$ , y aplica el resultado para demostrar que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = -1$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \text{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

15. Teniendo en cuenta que para  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (\text{Suma progresión geométrica})$$

y utilizando el teorema de Moivre, demuestra que si  $0 < \theta < 2\pi$ , entonces

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{sen}(\theta) + \text{sen}(2\theta) + \dots + \text{sen}(n\theta) = \frac{\text{sen}\left(n\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

---