Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electrónica (Grupo 1)/Electricidad

Cuestionario sobre operaciones básicas, 30 de octubre de 2007

1. **Calcula** $(1-3i)(5+5i)$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución:
   $$(1-3i)(5+5i) = 5+5i-15i-15i^2 = \boxed{20-10i}$$

2. **Calcula** $(2-3i)^3$ **y expresa el resultado en forma binómica**

   Solución: Resolvemos mediante el uso de la fórmula del binomio de Newton para la potencia tercera de una suma:
   $$\begin{aligned}(2-3i)^3 &= \binom{3}{0}2^3 + \binom{3}{1}2^2(-3i) + \binom{3}{2}2(-3i)^2 + \binom{3}{3}(-3i)^3 = \\ &= 8 - 3\cdot 2^2 \cdot 3i + 3\cdot 2\cdot (3i)^2 \\ &= 8 - 36i - 54 + 27i = -46-9i\end{aligned}$$

3. **Calcula** $\overline{(-2+i)(1-i)}(3-i)$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: En este caso podemos calcular los conjugados antes de multiplicar o realizar primero la multiplicación de los dos primeros y posteriormente su multiplicación. Elegimos la segunda forma y calculamos el producto de los dos primeros:
   $$(-2+i)(1-i) = -2+2i+i-i^2 = -1+3i$$
   y ahora multiplicamos por el tercero:
   $$\overline{(-2+i)(1-i)}(3-i) = \overline{(-1+3i)}(3-i) = (-1-3i)(3-i) = -3+i-9i+3i^2 = \boxed{-6-8i}$$

4. **Calcula** $\dfrac{(1-2i)}{(1+i)(2-3i)}$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: Calculamos el producto del denominador
   $$(1+i)(2-3i) = 2-3i+2i-3i^2 = 5-i$$
   que es más fácil de manejar, quitamos el complejo del denominador
   $$\frac{(1-2i)}{(1+i)(2-3i)} = \frac{(1-2i)}{(5-i)} = \frac{(1-2i)}{(5-i)}\frac{(5+i)}{(5+i)} = \frac{5+i-10i-2i^2}{25+1} = \boxed{\frac{7}{26} - i\frac{9}{26}}$$

5. **Calcula el módulo de** $\dfrac{\left(\sqrt{5}-2i\right)}{(-4+3i)}$.

Solución: Utilizaremos las propiedades del módulo de un cociente y solamente será necesario calcular el módulo del numerador y denominador

$$\left|\frac{\left(\sqrt{5}-2i\right)}{(-4+3i)}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{5}-2i\right)\right|}{|(-4+3i)|} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+(-2)^2}}{\sqrt{(-4)^2+(3)^2}} = \frac{\sqrt{5+4}}{\sqrt{16+9}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

6. **Calcula** $\sqrt[3]{-64}$ **y escribe el resultado en forma binómica.**

Solución: Expresamos el número complejo del radicando en forma polar

$$-64 = 64_{\pi}$$

Por tanto las raíces cúbicas de -64 tendrán como módulo común

$$|w_k| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{64} = 4$$

mientras que el argumento de cada una de las cuatro raíces cuartas vendrá dado por

$$\theta_k = \frac{\pi+2k\pi}{3} \quad k = 0,1,2$$

Los números complejos en forma polar y binómica pedidos son:

$$k=0 \Rightarrow w_0 = 4_{\pi/3} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2+i2\sqrt{3}}$$

$$k=1 \Rightarrow w_1 = 4_{\pi} = 4\left(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = 4\left(-1+i0\right) = \boxed{-4}$$

$$k=2 \Rightarrow w_2 = 4_{5\pi/3} = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2-i2\sqrt{3}}$$

7. **Expresa** $-8-8i$ **en forma polar, expresando el ángulo en radianes**

Solución: Es un complejo situado en el tercer cuadrante, luego su ángulo se obtendrá sumándole π al correspondiente del primer cuadrante

$$\begin{aligned} |-8-8i\,| &= \sqrt{(-8)^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \\ \theta &= \arctan\frac{-8}{-8} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}+\pi = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

El complejo en forma polar será

$$\boxed{\left(8\sqrt{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}}}$$

8. **Expresa** $\dfrac{(i^{23}+3i^{52})}{(i^{91}-2i^{246})}$ **en forma binómica**

Solución: En todos los casos calculamos el resto de la división del exponente de la unidad imaginaria i por 4

$$\begin{aligned} 23 &= 4\cdot 5+3 \\ 52 &= 4\cdot 13+0 \\ 91 &= 4\cdot 22+3 \\ 246 &= 4\cdot 61+2 \end{aligned}$$

y la expresión anterior es equivalente a:

$$\frac{(i^{23}+3i^{52})}{(i^{91}-2i^{246})}=\frac{(i^3+3\cdot i^0)}{(i^3-2i^2)}=\frac{(-i+3)}{(-i+2)}=\frac{3-i}{2-i}$$

y hacemos la división correspondiente para expresar el número en forma binómica

$$\frac{3-i}{2-i}=\frac{(3-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+3i-2i-i^2}{2^2-i^2}=\frac{7+i}{5}=\boxed{\frac{7}{5}+i\frac{1}{5}}$$

9. **Expresa** $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1-i)}$ **en forma polar, expresando el ángulo en radianes.**

Solución: Al pedir el resultado en forma polar, podemos intentar en primer lugar realizar las operaciones correspondientes de producto y cociente en esta forma. Por tanto, vamos a expresar numerador y denominador de esta fracción en forma polar. Para el numerador tenemos:

$$\begin{aligned} \left|1+i\sqrt{3}\right| &= \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2 \\ \theta &= \arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3} \quad \text{Complejo situado en el primer cuadrante} \end{aligned}$$

y para el denominador:

$$\begin{aligned} |1-i| &= \sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \\ \theta &= \arctan\frac{-1}{1}=\arctan -1=-\frac{\pi}{4} \quad \text{Complejo situado en el cuarto cuadrante} \end{aligned}$$

y ahora se pueden realizar la operación correspondiente en forma polar

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1-i)}=\frac{2_{\pi/3}}{\sqrt{2}_{-\pi/4}}=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{\pi/3-(-\pi/4)}=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{7\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

10. **Expresa**$\dfrac{2e^{i\pi/3}6e^{i17\pi/12}}{4e^{-i\pi/4}}$ **en forma binómica.**

Solución: Operamos directamente en forma polar antes de pasar a forma binómica,

$$\frac{2e^{i\pi/3}6e^{i17\pi/12}}{4e^{-i\pi/4}} = \left(\frac{2\cdot 6}{4}\right)_{\pi/3+17\pi/12-(-\pi/4)} = 3_{2\pi} = 3$$

Nota: El requisito para superar el cuestionario es tener al menos 7 preguntas correctas. No está permitido el uso de calculadora con memoria ni programable. No obstante, todos los ángulos deben emplearse en radianes.