Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso,
I.T.I. Electricidad
I.T.I. Electrónica Industrial

13 de julio de 2012

1. **(1.5 ptos.) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación siguiente:**

$$\operatorname{sen}(z) + \cos(z) = \sqrt{6}$$

Solución: Utilizamos la definición de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = \sqrt{6}$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w - \dfrac{1}{w}}{2i} + \frac{w + \dfrac{1}{w}}{2} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{w^2 - 1}{2wi} + \frac{w^2 + 1}{2w} = \sqrt{6}$$

y multiplicando por $2wi$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$\left(w^2 - 1\right) + i\left(w^2 + 1\right) = 2wi\sqrt{6} \Rightarrow (1+i)\,w^2 - 2wi\sqrt{6} + (i-1) = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula de segundo grado

$$w = \frac{2i\sqrt{6} \pm \sqrt{\left(2i\sqrt{6}\right)^2 - 4\cdot(1+i)\,(i-1)}}{2\cdot(1+i)} = \frac{2i\sqrt{6} \pm \sqrt{-16}}{2\,(1+i)} = \frac{2i\sqrt{6} \pm 4i}{2\,(1+i)} = \frac{\sqrt{6} \pm 2}{2}\,(1+i)$$

obteniendo dos soluciones

$$w_1 = \frac{\sqrt{6}+2}{2}\,(1+i)$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,(1+i)$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w$. Necesitamos la forma exponencial de w_1 y w_2 que claramente

$$w_1 = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$$

$$w_1 = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$$

por lo que

$$iz_1 = \log\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}(1+i)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \Rightarrow z_1 = -i\ln\left(\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$iz_2 = \log\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}(1+i)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \Rightarrow z_2 = -i\ln\left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

2. **(1.5 ptos.) Compruebe que la parte real y la parte imaginaria de $f(z) = z^4$ son funciones armónicas.**

   Solución: Buscamos las expresiones para la parte real $u(x,y)$ y la parte imaginaria $v(x,y)$ de la función $f(z)$, para ello tenemos en cuenta que $z = x+iy$, por tanto

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^4$$

   expresión que podemos desarrollar por el binomio de Newton o mediante la multiplicación directa:

$$\begin{aligned}(x+iy)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^k(iy)^{4-k} = \binom{4}{0}x^0(iy)^4 + \binom{4}{1}x^1(iy)^3 + \binom{4}{2}x^2(iy)^2 + \binom{4}{3}x^3(iy)^1 + \binom{4}{4}x^4(iy)^0 \\ &= y^4 - 4xy^3 i - 6x^2y^2 + 4x^3yi + x^4 \\ &= \left(x^4+y^4-6x^2y^2\right) + i\left(4x^3y - 4xy^3\right)\end{aligned}$$

   por tanto

$$\begin{aligned}u(x,y) &= x^4+y^4-6x^2y^2 \\ v(x,y) &= 4x^3y-4xy^3\end{aligned}$$

   Para comprobar que u y v son armónicas, tendremos que comprobar que cumplen la ecuación de Laplace

$$\left.\begin{array}{r} u_x = 4x^3-12xy^2 \Rightarrow u_{xx} = 12x^2-12y^2 \\ u_y = 4y^3-12x^2y \Rightarrow u_{yy} = 12y^2-12x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy} = \left(12x^2-12y^2\right)+\left(12y^2-12x^2\right) = 0$$

   luego u es armónica. Y para v

$$\left.\begin{array}{r} v_x = 12x^2y-4y^3 \Rightarrow v_{xx} = 24xy \\ v_y = 4x^3-12xy^2 \Rightarrow v_{yy} = -24xy \end{array}\right\} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy} = (24xy)+(-24xy) = 0$$

   y por tanto también es armónica.

3. **(1.5 ptos.) Calcule el desarrollo de Taylor de la función**

$$f(z) = \frac{1}{1+z^3}$$

   convergente el el disco

$$D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

   Solución: El desarrollo de Taylor de $f(z)$ es directo. Si hacemos el cambio $z^3 = w$

$$\frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{1+w}$$

obviamente como $|z| < 1$, también ocurrirá que $|w| = |z^3| < 1$ y entonces utilizando el desarrollo de la serie geométrica

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$$

y deshaciendo el cambio

$$\frac{1}{1+z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n}$$

4. **(2 ptos.) Calcule las siguientes integrales**

   a)
$$\int_\gamma \frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+z+1)} dz; \quad \gamma(t) = i + \frac{1}{2} e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

   b)
$$\int_\gamma y dz;$$

   donde γ es la curva unión del segmento que va desde 0 a i y del segmento que va desde i a $i+2$

Solución:

a) Es la integral de un cociente de funciones derivables a lo largo de una curva cerrada, por tanto utilizaremos el teorema de los residuos teniendo en cuenta solamente las singularidades que caen dentro de la curva. Las singularidades de la función son los números complejos que anulan el denominador de la función, por tanto

$$\left(z^2+1\right)\left(z^2+z+1\right) = 0$$

que tiene por soluciones

$$\begin{aligned}
\left(z^2+1\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = i \\ \\ z_2 = -i \end{cases} \\
\left(z^2+z+1\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ z_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

que son todos polos simples. Para aplicar el teorema de los residuos sólo se tiene en cuenta las singularidades que están dentro de la curva cerrada, como es una circunferencia tendremos que comporbar cuál de las cuatro singularidades anteriores está a una distancia de su centro (i) inferior a su radio $\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
d(z_1, 0) &= |i - i| = |0| = 0 < \frac{1}{2} \\
d(z_2, 0) &= |-i - i| = |-2i| = 2 > \frac{1}{2} \\
d(z_3, 0) &= \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\right| = \left|-\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} > \frac{1}{2} \\
d(z_4,) &= \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\right| = \left|-\frac{1}{2} - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

luego solamente z_1 está dentro. El residuo para z_1 se puede calcular mediante límites

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+z+1)}, i\right) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+z+1)} = \lim_{z\to i}\frac{z^3}{(z+i)(z^2+z+1)} = \frac{1}{2}i$$

y la integral será

$$\int_\gamma \frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+z+1)}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{(z^2+1)(z^2+z+1)}, i\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{2}i\right) = -\pi$$

b) En este caso la curva no es cerrada y por tanto no es posible utilizar el teorema de los residuos, además la función $f(z) = y = \operatorname{Im}(z)$ carece de singularidades aisladas, de hecho podemos comprobar, aunque no es necesario ya que se ha dicho que la curva no es cerrada, que no es derivable en ningún punto:

$$\operatorname{Im}(z) = y \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = y \Rightarrow \begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 1 \end{cases} \\ v(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

y como $u_y \neq -v_x$ en ningún punto, entonces no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ningún punto y por tanto no será derivable en ningún punto. Debemos emplear por tanto la definición de integral a lo largo de una curva:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

En este caso γ es la unión de los dos segmentos, por tanto podemos utilizar la propiedad de integral a lo largo del arco unión, para poner

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

siendo en este caso γ_1 el segmento que une 0 con i, y γ_2 el segmeno que une i con $i+2$, por tanto

$$\gamma_1(t) = (1-t)\cdot 0 + t\cdot i = it \qquad t\in[0,1] \Rightarrow \gamma_1'(t) = i$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\cdot i + t\cdot(i+2) = 2t+i \qquad t\in[0,1] \Rightarrow \gamma_2'(t) = 2$$

Aplicamos definición de integral en cada uno de los segmentos

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^1 \operatorname{Im}(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^1 tidt = i\left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{i}{2}$$

$$\int_{\gamma 2} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt = \int_0^1 \operatorname{Im}(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt = \int_0^1 2dt =_{t=0}^{t=1}= \left.i2t\right|_{t=0}^{t=1} = 2i$$

y la integral buscada es la suma de ambas

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \frac{i}{2} + 2i = \frac{5}{2}i$$

5. **(1.75 ptos.) Calcule razonadamente, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{13 - 12\cos 2t}dt.$$

- **Solución:** Es una integral trigonométrica de una función racional en $(\operatorname{sen} t, \cos t)$, por tanto haremos el cambio usual

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= \frac{z^2-1}{2zi}\\ \cos t &= \frac{z^2+1}{2z}\\ dt &= \frac{1}{iz}dz\end{aligned}$$

Para $\cos 2t$, podemos proceder de dos forma, bien mediante el cambio trigonométrico

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$$

o bien utilizando la fórmula del coseno

$$\cos 2t = \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2}$$

y teniendo en cuenta el cambio $e^{it} = z$

$$\cos 2t = \frac{z^2 + \frac{1}{z^2}}{2} = \frac{z^4+1}{2z^2}$$

Con estos cambios la función del integrando es

$$\frac{\cos t}{13 - 12\cos 2t}dt = \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{13 - 12\frac{z^4+1}{2z^2}}\frac{1}{iz}dz = \frac{i\left(z^2+1\right)}{12z^4 - 26z^2 + 12}dz = \frac{i}{2}\frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}dz$$

y la integral trigonométrica se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{13 - 12\cos 2t}dt = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}dz = \frac{i}{2}\int_\gamma f(z)\,dz$$

siendo

$$\gamma(t) = e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen y siendo $f(z)$, la función racional

$$f(z) = \frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}$$

Utilizando el teorema de los residuos podremos resolver dicha integral. En primer lugar buscaremos los ceros del denominador de la función, teniendo en cuenta que es una ecuación bicuadrática

$$6z^4 - 13z^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} z_1^2 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ z_2^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Luego las cuatro raíces serían

$$z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\\ z_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\\ z_4 &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Tamdp z_1 como z_2 están fuera de la circunferencia den centro $(0,0)$ y radio 1, puesto que

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$$

mientras que z_3 y z_4 están dentro puesto que

$$|z_3| = |z_4| = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

Estos son los puntos que contribuyen al cálculo de la integral (hay que tener en cuenta que el factor $\frac{i}{2}$ está fuera de la integral):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{13 - 12\cos 2t} dt = \frac{i}{2} 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right\}$$

Ambos residuos se calculan de la misma forma, mediante límites

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) &= \lim_{z \to \sqrt{\frac{2}{3}}} \left(z - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \frac{z^2+1}{6\left(z - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(z - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \\
&= \lim_{z \to \sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{z^2+1}{6\left(z + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(z - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 1}{6\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \\
&= -\frac{1}{12}\sqrt{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) &= \lim_{z \to -\sqrt{\frac{2}{3}}} \left(z + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \frac{z^2+1}{6\left(z - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(z - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \\
&= \lim_{z \to -\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{z^2+1}{6\left(z - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(z - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(z + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \\
&= \frac{\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 1}{6\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \\
&= \frac{1}{12}\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Luego la integral será

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{13 - 12\cos 2t} dt &= \frac{i}{2} 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right\} \\
&= -\pi \left\{ -\frac{1}{12}\sqrt{6} + \frac{1}{12}\sqrt{6} \right\} = 0
\end{aligned}$$

6. (1.75 puntos) Resuelva la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} y_{n+2} + 2y_n = 0 \qquad (n \geq 2) \\ y_0 = 1, \\ y_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Solución: Aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2}+2y_n\right](z)=\mathcal{Z}\left[0\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right](z)+2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)=\mathcal{Z}\left[0\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right](z) &= z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-z^2y_0-zy_1=z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-z^2-z\sqrt{2}\\ \mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= \mathcal{Z}\left[y_n\right](z)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}\left(z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-z^2-z\sqrt{2}\right)+2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= \mathcal{Z}\left[0\right](z)\\ \left(z^2+2\right)\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-z^2-z\sqrt{2} &= \mathcal{Z}\left[0\right](z)\end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)[z]=\frac{\mathcal{Z}\left[0\right](z)+z^2+z\sqrt{2}}{\left(z^2+2\right)}$$

Obviamente $\mathcal{Z}\left[0\right](z)=0$, por tanto

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)[z]=\frac{z^2+z\sqrt{2}}{\left(z^2+2\right)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n=\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z^2+z\sqrt{2}}{z^2+2}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples, pero antes observemos que el numerador y denominador tienen el mismo grado, por tanto hay que hacer una división antes de realizar cualquier descomposición en fracciones simples. Notar que

$$\frac{z^2+z\sqrt{2}}{z^2+2}=\frac{z^2+z\sqrt{2}+2-2}{z^2+2}=\frac{z^2+2}{z^2+2}+\frac{z\sqrt{2}-2}{z^2+2}=1+\frac{z\sqrt{2}-2}{z^2+2}$$

Y con los ceros del denominador tenemos:

$$F(z)=1+\frac{z\sqrt{2}-2}{z^2+2}=1+\left(\frac{A}{z-\sqrt{2}i}+\frac{B}{z+\sqrt{2}i}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0,r,\infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-\sqrt{2}i} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}i}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}i}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}}{z^n} \quad \text{si } |z|>\sqrt{2}\\ \frac{1}{z+\sqrt{2}i} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}i}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{2}i}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}i\right)^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}}{z^n} \quad \text{si } |z|>\sqrt{2}\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned}
1+\left(\frac{A}{z-\sqrt{2}i}+\frac{B}{z+\sqrt{2}i}\right) &= 1+\left(A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}}{z^n}+B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}}{z^n}\right) \quad \text{si } |z|>\sqrt{2}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}+B(-1)^{n-1}\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} \quad |z|>\sqrt{2}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}\left(A+B(-1)^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos. Vemos que

$$y_0 = 1$$

mientras que para $n \geq 1$

$$y_n = \left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}\left(A+B(-1)^{n-1}\right)$$

Vamos a calcular A y B de la descomposición en fracciones simples

$$\frac{z\sqrt{2}-2}{z^2+2} = \frac{A}{z-\sqrt{2}i}+\frac{B}{z+\sqrt{2}i}$$

por tanto

$$A\left(z+\sqrt{2}i\right)+B\left(z-\sqrt{2}i\right) = z\sqrt{2}-2$$

de donde

$$\text{Si } z=\sqrt{2}i \Rightarrow 2A\sqrt{2}i = 2i-2 \Rightarrow A = \frac{-1+i}{\sqrt{2}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Si } z=-\sqrt{2}i \Rightarrow -2B\sqrt{2}i = -2i-2 \Rightarrow B = \frac{-1-i}{-\sqrt{2}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Y la expresión de y_n será

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}i\right)^{n-1}\left((1+i)+(1-i)(-1)^{n-1}\right) =$$

Por claridad multiplicamos y dividimos por $\sqrt{2}i$, para poner la expresión en términos de n y utilizamos también el hecho de que $(-1)^2 = 1$, para obtener

$$y_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n i^n}{2i}\left((1+i)-(1-i)(-1)^n\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2i}\left((1+i)i^n-(1-i)(-i)^n\right)$$

Ahora dejaremos la solución expresada en forma real. Para ello como

$$i = e^{i\pi/2} \Rightarrow i^n = e^{in\pi/2} = \cos\frac{n\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}$$

y

$$-i = e^{-i\pi/2} \Rightarrow (-i)^n = e^{-in\pi/2} = \cos\frac{n\pi}{2}-i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\left((1+i)i^n-(1-i)(-i)^n\right) &= (1+i)\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right)-(1-i)\left((1+i)\left(\cos\frac{n\pi}{2}-i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right)\right)\\
&= 2i\left(\cos\frac{n\pi}{2}+\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

por tanto

$$y_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2i}\left((1+i)\, i^n - (1-i)\,(-i)^n\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) \qquad n \geq 1$$

Notar también que la expresión es válida para $n = 0$

$$y_0 = \left(\sqrt{2}\right)^0 (\cos 0 + \operatorname{sen} 0) = 1$$