Variable Compleja y Transformadas

Ingeniería Técnica Industrial
Especialidad en Electrónica Industrial
Especialidad en Eléctricidad

17 de febrero de 2012

1. **Conteste las siguientes cuestiones:**

   (a) **(0.5 ptos.) Escriba en forma binómica** $\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{2012}$.

   Solución: Ponemos el complejo $z_1 = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ en forma exponencial

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$\theta_z = \arctan\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = \arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{(Está en el segundo cuadrante)}$$

   Y realizamos la operación de potenciación en esa forma

$$\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{2012} = \left(e^{i2\pi/3}\right)^{2012} = e^{i2\cdot 2012\pi/3}$$

   Descontando vueltas completas

$$\frac{2\cdot 2012}{3}\pi = \frac{2\pi\,(67\cdot 3+2)}{3} = 2\pi\cdot 67+\frac{4\pi}{3}$$

   Se han dado 67 vueltas completas a la circunferencia y queda un ángulo de $4\pi/3$ radianes, por tanto

$$e^{i2\cdot 2012\pi/3} = e^{i4\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

   (b) **(0.75 ptos.) Calcule en forma binómica todas las soluciones de la ecuación**

$$z^4+1=0.$$

   Solución: Está claro que los complejos que cumplen la ecuación son las raíces cuartas de $-1 \Rightarrow$

$$z = \sqrt[4]{-1}$$

   Pondremos el radicando en forma exponencial para realizar el cálculo de estas raíces. Teniendo en cuenta que -1 es un número real negativo

$$-1 = 1\cdot e^{i\pi}$$

y las raíces cuartas son

$$w_k = \sqrt[4]{|z|}e^{i\varphi_k}$$

donde

$$\varphi_k = \frac{\theta_z + 2k\pi}{4} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

En este caso $|z| = 1$ y $\theta_z = \pi \Rightarrow$

$$w_k = e^{i\varphi_k}$$

siendo

$$\varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

y las raíces buscadas son

$$\begin{aligned}
k &= 0 \Rightarrow w_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\
k &= 1 \Rightarrow w_0 = e^{i3\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\
k &= 2 \Rightarrow w_0 = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\
k &= 3 \Rightarrow w_0 = e^{i7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i
\end{aligned}$$

(c) **(0.5 ptos.) Encuentre los números complejos para los que es derivable la siguiente función:**

$$f(z) = \overline{z}\,\mathrm{Re}(z) + z\,\mathrm{Im}(z)$$

Solución: Pondremos la función en términos de (x, y) antes de aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$f(x + iy) = (x - iy)x + (x + iy)y = \left(x^2 + xy\right) + i\left(y^2 - xy\right)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
u &= \left(x^2 + xy\right) \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x + y \\ \\ u_y = x \end{cases} \\
v &= \left(y^2 - xy\right) \Rightarrow \begin{cases} v_x = -y \\ \\ v_y = 2y - x \end{cases}
\end{aligned}$$

De la primera ecuación de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \Rightarrow (2x + y) = (2y - x) \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x$$

mientras que de la segunda ecuación

$$u_y = -v_x \Rightarrow x = -(-y) \Rightarrow y = x$$

Los puntos donde $f(z)$ es derivable son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = 3x \\ \\ y = x \end{cases}$$

La única solución es el punto $(0, 0)$ y por tanto el complejo $z_0 = 0$ es el único punto donde la función $f(z)$ es derivable.

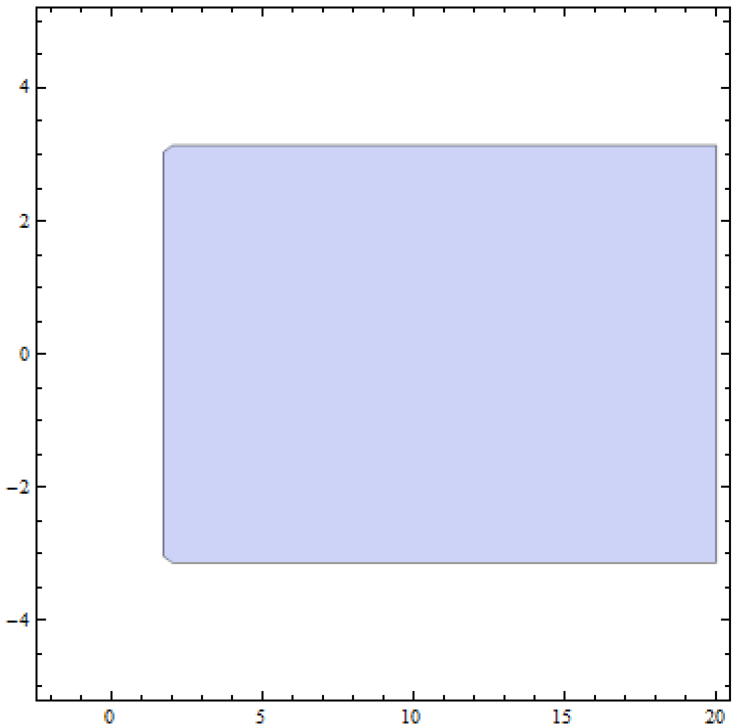
(d) **(0.25 ptos.) Teniendo en cuenta que $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, represente en el plano el conjunto**

$$\{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi, \sqrt{3} \leq \operatorname{Re}(z)\}$$

Solución: Expresamos el complejo z en forma binómica $z = x + iy$ y el conjunto estaría definido por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -\pi < y < \pi, \sqrt{3} \leq x\}$$

cuya representación gráfica es una banda horizontal de anchura 2π con centro en el eje real, es decir



(e) **(1 pto.) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación siguiente:**

$$\cos(z) + i\sqrt{3} = 0.$$

Solución: Utilizamos la definición de $\cos(z)$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación como

$$\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) + i\sqrt{3} = 0$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w + \frac{1}{w}}{2} + i\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \frac{w^2 + 1}{2w} + i\sqrt{3} = 0$$

Multiplicando por $2w$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$(w^{\text{`}}+1)+2wi\sqrt{3}=0 \Rightarrow w^2+2wi\sqrt{3}+1=0$$

cuya solución es

$$w=\frac{-2i\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(-2i\sqrt{3}\right)^2-4\cdot(1)(1)}}{2\cdot 1}=\frac{-2i\sqrt{3}\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2i\sqrt{3}\pm 4i}{2}=\left(-\sqrt{3}\pm 2\right)i$$

Se obtienen dos soluciones

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(-\sqrt{3}+2\right)i \\ w_2 &= \left(-\sqrt{3}-2\right)i \end{aligned}$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo

$$e^{iz}=w \Rightarrow iz=\log w=\ln|w|+i\arg(w)$$

Si tenemos en cuenta que w_1 y w_2 son dos números imaginarios puros con parte imaginaria positiva

$$w_1=\left(-\sqrt{3}+2\right)i \Rightarrow \begin{cases} |w_1|=2-\sqrt{3} \\ \theta_{w_1}=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$w_2=\left(-\sqrt{3}-2\right)i \Rightarrow \begin{cases} |w_1|=2+\sqrt{3} \\ \theta_{w_1}=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

y tomando logaritmos

$$iz_1=\log(w_1)=\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow z_1=-i\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$iz_2=\log(w_2)=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow z_2=-i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$$

2. **(1.75 ptos.) Se considera la función racional $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1/4)(z^2-4z-12)}$. Calcule, justificando la validez de la región de convergencia, el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo**

$$\mathcal{A}(0;2,6)=\{z\in\mathbb{C};\ 2<|z|<6\}.$$

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador con el objetivo de descomponer la función en fracciones simples. Está claro que una de las raíces es $z_1=1/4$, para las otras resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado

$$(z^2-4z-12)\Leftrightarrow z=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot(-12)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{4\pm 8}{2}\Rightarrow\begin{cases} z_2=\frac{4+8}{2}=6 \\ z_3=\frac{4-8}{2}=-2 \end{cases}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1/4)(z^2-4z-12)} = \frac{z^2}{(z-1/4)(z-6)(z+2)}$$

La descomposición en factores simples es

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1/4)(z-6)(z+2)} = \left(\frac{A}{z-1/4} + \frac{B}{z-6} + \frac{C}{z+2}\right).$$

Del miembro de la derecha se obtiene

$$\frac{A(z-6)(z+2) + B(z-1/4)(z+2) + C(z-1/4)(z-6)}{(z-1/4)(z-6)(z+2)}$$

e igualando numeradores

$$A(z-6)(z+2) + B(z-1/4)(z+2) + C(z-1/4)(z-6) = z^2$$

Si vamos dando a z los valores de las raíces, obtendremos los valores de los parámetros A, B y C

$$\left.\begin{array}{l} z = 1/4 \Rightarrow A(1/4-6)(1/4+2) = 1/16 \Rightarrow A = -\frac{1}{207} \\ \\ z = 6 \Rightarrow B(6-1/4)(6+2) = 36 \Rightarrow B = \frac{36}{46} = \frac{18}{23} \\ \\ z = -2 \Rightarrow C(-2-1/4)(-2-6) = 4 \Rightarrow C = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \end{array}\right\}$$

Con estos valores y la descomposición es

$$\frac{z^2}{(z-1/4)(z-6)(z+2)} = \left(-\frac{1}{207(z-1/4)} + \frac{18}{23(z-6)} + \frac{2}{9(z+2)}\right)$$

Buscamos el desarrollo de cada fracción. Para la primera fracción y como $2 < |z|$, entonces $\frac{1}{4} < 2 < |z| \Rightarrow \frac{1}{|4z|} < \frac{2}{|z|} < 1$ y entonces

$$\frac{1}{z-1/4} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{4z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{1}{z^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{1}{4z}\right| < 1$$

Para la segunda fracción $2 < |z| \Rightarrow \frac{2}{|z|} < \frac{|z|}{|z|} < 1$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

Finalmente como $|z| < 6 \Rightarrow \frac{|z|}{6} < 1$

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{6\left(\frac{z}{6}-1\right)} = \frac{-1}{6}\frac{1}{1-\frac{z}{6}} = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{z}{6}\right| < 1$$

La función tendrá el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(-\frac{1}{207}\frac{1}{(z-1/4)} + \frac{18}{23}\frac{1}{(z-6)} + \frac{2}{9}\frac{1}{(z+2)}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{207}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{18}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}} + \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Si agrupamos las potencias negativas y positivas

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^n}+\frac{2}{9}(-1)^n 2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{18}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}}$$

y simplificando

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^n}+\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{9}\right)\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{3}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^n}$$

Para terminar cambiamos el contador en la primera suma $n+1\Rightarrow n$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1} 2^{n}}{9}\right)\frac{1}{z^{n}}-\frac{3}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^n}$$

3. **Calcule las siguientes integrales:**

   (a) **(1.5 ptos.)**

$$\int_\gamma \frac{(z^2+1)(z^2+3)}{(z^2+9)(z^2+4)}dz; \quad \gamma(t)=\frac{5}{2}e^{it},\ t\in[0,2\pi].$$

4. **Solución:** Es la integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada, por tanto utilizaremos el teorema de los residuos teniendo en cuenta solamente las singularidades que están dentro de la curva. Las singularidades de una función racional son los números complejos que anulan el denominador de la función, por tanto

$$(z^2+9)(z^2+4)=0$$

que tiene por soluciones

$$\begin{aligned}(z^2+4) &= 0\Rightarrow\begin{cases} z_1=2i\\ z_2=-2i\end{cases}\\ (z^2+9) &= 0\Rightarrow\begin{cases} z_3=3i\\ z_4=-3i\end{cases}\end{aligned}$$

Son todos polos simples, puesto que son ceros simples del denominador que no anulan el denominador (también puede demostrarse utilizando la definición de polo simple).

Como la curva es una circunferencia de centro 0 y radio $\frac{5}{2}$, para comprobar si una singularidad está dentro de la curva, tendremos que comprobar que la distancia de la singularidad al centro es menor que el radio

$$\begin{aligned}d(z_1,0) &= d(2i,0)=|2i-0|=|2i|=2<\frac{5}{2}\\ d(z_2,0) &= d(-2i,0)=|-2i-0|=|-2i|=2<\frac{5}{2}\\ d(z_3,0) &= d(3i,0)=|3i-0|=|3i|=3>\frac{5}{2}\\ d(z_4,0) &= d(-3i,0)=|-3i-0|=|-3i|=3>\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Solamente z_1 y z_2 están en el interior de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\frac{5}{2}$, los residuos se calculan de la forma usual mediante límites

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)},2i\right) &= \lim_{z\to 2i}\left(z-2i\right)\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)} = \lim_{z\to 2i}\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z+2i\right)} = -\frac{3}{20}i \\
\operatorname{Res}\left(\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)},-2i\right) &= \lim_{z\to 2i}\left(z+2i\right)\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)} = \lim_{z\to 2i}\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z-2i\right)} = \frac{3}{20}i
\end{aligned}$$

y la integral será

$$\int_\gamma \frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)},2i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^2+3\right)}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)},-2i\right)\right)=0$$

(b) **(1.75 ptos.) Calcule razonadamente, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real**

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\operatorname{sen}t}dt.$$

Solución: Es una integral trigonométrica de una función racional en $(\operatorname{sen}t,\cos t)$, por tanto haremos el cambio usual

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}t &= \frac{z^2-1}{2iz} \\
dt &= \frac{1}{iz}dz
\end{aligned}$$

en este caso la función del integrando es

$$\frac{1}{2+\operatorname{sen}t}dt = \frac{1}{2+\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{1}{iz}dz = \frac{2}{4iz+z^2-1}dz$$

y la integral trigonométrica se transofrma en

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\operatorname{sen}t}dt = \int_\gamma \frac{2}{z^2+4iz-1}dz$$

siendo

$$\gamma(t)=e^{it} \qquad t\in[0,2\pi]$$

Utilizando el teorema de los residuos podremos resolver dicha integral. En primer lugar buscaremos los ceros del denominador de la función

$$z^2+4iz-1 \Leftrightarrow z = \frac{-4i\pm\sqrt{-16+4}}{2} = \frac{-4i\pm\sqrt{-12}}{2} = \frac{-4i\pm 2\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \left(-2+\sqrt{3}\right)i \\ z_2 = \left(-2-\sqrt{3}\right)i \end{cases}$$

Sólo z_1 está en la circunferencia den centro $(0,0)$ y radio 1, puesto que

$$|z_1| = \left|\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right| = 2-\sqrt{3}<1$$

mientras que z_2 estará fuera puesto que

$$|z_1| = \left|\left(-2-\sqrt{3}\right)i\right| = 2+\sqrt{3} > 1$$

Para la integral sólo tendremos en cuenta a z_1

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen} t} dt. = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2}{z^2+4iz-1}, \left(-2+\sqrt{3}\right)i\right) = 2\pi i \frac{2}{\left(-2+\sqrt{3}\right)i - \left(-2-\sqrt{3}\right)i} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$$

5. **(2 ptos.)**

 (a) **Resuelva mediante la transformada $\mathcal{Z}$ la siguiente ecuación en diferencias con condiciones iniciales:**

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n; \qquad n \geq 0 \\ \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Solución: Para resolver la ecuación en diferencias

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

junto con las condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) - 3\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) + 2\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y_{n+2}](z) &= z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - z^2 y_0 - zy_1 = z^2\mathcal{Z}[y_n](z) \\ \mathcal{Z}[y_{n+1}](z) &= z\mathcal{Z}[y_n](z) - zy_0 = z\mathcal{Z}[y_n](z) \\ \mathcal{Z}[y_n](z) &= \mathcal{Z}[y_n](z) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - 3\mathcal{Z}[y_n](z) + 2\mathcal{Z}[y_n](z) &= \mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\right](z) \\ \left(z^2 - 3z + 2\right)\mathcal{Z}[y_n](z) &= \mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\right](z) \end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{\mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\right](z)}{(z^2-3z+2)}$$

El valor de $\mathcal{Z}\left[1/4^n\right](z)$ lo obtenemos mediante la aplicación directa la definición de transformada $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[1/4^n\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4z)^n} = \frac{1}{1-1/4z} = \frac{4z}{4z-1}$$

y por fin obtenemos la transformada de y_n

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)[z] = \frac{\frac{4z}{4z-1}}{\left(z^2-3z+2\right)} = \frac{4z}{(4z-1)\left(z^2-3z+2\right)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n = Z^{-1}\left(\frac{4z}{(4z-1)\left(z^2-3z+2\right)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Las raíces del denominador son

$$\left(z^2-3z+2\right) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} z_1 = 1 \\ \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

y por otra

$$z_3 = \frac{1}{4}$$

la descomposición de $F(z)$ es

$$F(z) = \frac{4z}{(4z-1)\left(z^2-3z+2\right)} = \frac{z}{(z-1)(z-2)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-\frac{1}{4}}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z-2)\left(z-\frac{1}{4}\right) + B(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right) + C(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-2)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

Por tanto

$$A(z-2)\left(z-\frac{1}{4}\right) + B(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right) + C(z-1)(z-2) = z$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 \Rightarrow A(1-2)\left(1-\frac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow A = -\frac{4}{3} \\ \\ z = 2 \Rightarrow B(2-1)\left(2-\frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow B = \frac{8}{7} \\ \\ z = \frac{1}{4} \Rightarrow C\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{4}{21} \end{array}\right\}$$

y la descomposición es

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \left(-\frac{4}{3(z-1)} + \frac{8}{7(z-2)} + \frac{4}{21\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \qquad |z| > 1 \\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \qquad |z| > 2 \\
\frac{1}{z-\frac{1}{4}} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{4z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{z^n} \qquad |z| > \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-1)(z-2)\left(z-\frac{1}{4}\right)} &= -\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{8}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} + \frac{4}{21}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{z^n} \qquad |z| > 2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{7}2^{n-1} + \frac{4}{21}\frac{1}{4^{n-1}}\right)\frac{1}{z^n} \qquad |z| > 2
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = \left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{7}2^{n-1} + \frac{4}{21}\frac{1}{4^{n-1}}\right) \qquad n \geq 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

Si tenemos en cuenta que $8 = 2^3$ y simplificamos es posible expresar y_n como

$$\boxed{y_n = -\frac{4}{3} + \frac{1}{7}2^{n+2} + \frac{1}{21 \cdot 4^{n-2}}}$$

Podemos comprobar que para $n = 1$, se obtienen los valores de las condiciones iniciales

$$y_1 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{7}2^{1+2} + \frac{1}{21 \cdot 4^{1-2}} = -\frac{4}{3} + \frac{8}{7} + \frac{4}{21} = 0$$

También es válido para $n = 0$

$$y_0 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{7}2^{0+2} + \frac{1}{21 \cdot 4^{0-2}} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{7} + \frac{16}{21} = 0$$

(b) **Utilice la expresión de $y[n]$ para calcular el valor de $y[4]$.**
Solución: Sólo tenemos que sustitutir n por 4 en la expresión de y_n obtenida en el apartado anterior.

$$y_4 = \left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{7}2^{4-1} + \frac{4}{21}\frac{1}{4^{4-1}}\right) = \frac{125}{16}$$