Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electrónica Industrial, Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 13 de septiembre de 2011

1. Expresa el número complejo $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ en forma polar o exponencial.

   Solución:

$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arctan 1, \text{ como } z \text{ está en el } 1^{er} \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{4}$$

2. Calcula el inverso de $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Aplicamos la definición de inverso para $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Calcula el módulo de $z = \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{(1+2i)}$.

   Solución: No es necesario realizar las operaciones para pasarlo a forma binómica, ya que se utilizan las propiedades de los módulos

$$|z| = \left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{(1+2i)}\right| = \frac{\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\left|(1 + i\sqrt{3})\right|}{|1+2i|} = \frac{1 \cdot \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}}{\left(\sqrt{1^2 + (2)^2}\right)} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

4. Calcula $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$ expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Ponemos en forma polar o exponencial

$$\text{Módulo: } |z| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 1^{er} \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

   Si ahora elevamos a 6 utilizando la definición de potencia entera de un complejo en forma polar

$$z^6 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^6 = 2^6 e^{i6\pi/3} = 2^6 e^{i2\pi} = 2^6 = 64$$

5. Calcula $z = \sqrt[3]{i}$ y escribe los resultados en forma binómica.

Solución: Escribimos el número $-i$ en forma polar

$$\text{Módulo: } |z| = \ \ |i| = 1$$

Argumento: Como z es un número imaginario puro, con parte imaginaria positiva $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Las raíces cúbicas de z son

$$w_k = \sqrt[3]{|z|} e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{3} = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi + 4k\pi}{6} \text{ con } k = 0, 1, 2$$

por tanto, teniendo en cuenta que $|z| = 1$ y por tanto $|w_k| = \sqrt[3]{1} = 1$

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\varphi_0} = e^{i\pi/6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ w_1 &= e^{i\varphi_1} = e^{i5\pi/6} = e^{i(\pi - \pi/6)} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^3 \\ w_2 &= e^{i\varphi_2} = e^{i9\pi/6} = e^{i(3\pi/2)} = -i \end{aligned}$$

6. Calcula $z = \dfrac{2-i}{3+i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Para dividir ambos complejos, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{2-i}{3+i} = \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6 - 2i - 3i + i^2}{|3+i|^2} = \frac{5-5i}{9+1} = \frac{5}{10} - \frac{5}{10}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

7. Calcula $(1-i)\overline{(3-i)}$ y expresa resultado en forma binómica.

Solución: Operamos normalmente utilizando el producto entre complejos

$$(1-i)\overline{(3-i)} = (1-i)(3+i) = 3 + i - 3i - i^2 = 4 - 2i$$

8. Calcula $z = \dfrac{\left(3 + 2i^{30}\right) i^{16}}{i^{247}}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de i.

$$\begin{aligned} 30 &= 7 \cdot 4 + 2 \Rightarrow i^{30} = i^2 = -1 \\ 16 &= 4 \cdot 4 \Rightarrow i^{16} = i^0 = 1 \\ 247 &= 4 \cdot 61 + 3 \Rightarrow i^{247} = i^3 = -i \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\left(3 + 2i^{30}\right) i^{16}}{i^{247}} = \frac{(3-2) \cdot 1}{(-i)} = i$$

9. Calcula y expresa $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ en forma polar o exponencial.

Solución: Si hacemos el producto en forma binómica obtendremos

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} = -3 - i3\sqrt{3}$$

que en forma polar es muy sencillo de expresar:

$$\text{Módulo: } |z| = \left|-3 - i3\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{-3\sqrt{3}}{-3} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 3^o \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$6e^{i4\pi/3}$$

También es posible realizar el cálculo en forma exponencial, poniendo cada número en dicha forma. Para el complejo $1 - i\sqrt{3}$ ya hemos obtenido su expresión polar en el ejercicio 4

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$$

Para el segundo complejo $\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{-3\sqrt{3}/2}{3/2} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 4^{er} \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Y podemos hacer el producto en forma exponencial

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2e^{-i\pi/3}\right)\left(3e^{-i\pi/3}\right) = 6e^{-i2\pi/3} = 6^{i4\pi/3}$$

10. Calcula y expresa $z = \dfrac{(1 - i\sqrt{3})}{\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ en forma polar o exponencial.

Solución: La forma exponencial para los complejos del numerador y denominador ya se obtuvieron en el ejercicio anterior, por tanto lo único que nos queda por hacer es realizar la operación cociente en forma polar

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})}{\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2e^{-i\pi/3}}{3e^{-i\pi/3}} = \frac{2}{3}$$

<u>Nota</u>: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica Industrial
Examen de problemas, 13 de septiembre de 2011

OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

1.- Responda razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.
2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.
3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.
4.- Utilice resultados exactos, sin decimales, recuerde que **no está permitido** el uso de calculadora.

---

1. (1.0 puntos) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación siguiente:

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{3}{4}i.$$

Solución: Utilizaremos la definición de $\operatorname{sen} z$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación como:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{3}{4}i$$

Y a continuación hacemos el siguiente cambio de variable

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = \frac{3}{4}i \Rightarrow \frac{w^2 - 1}{2iw} = \frac{3}{4}i$$

y multiplicando por $4iw$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$4iw\left(\frac{w^2-1}{2iw}\right) = 4iw\left(\frac{3}{4}i\right) \Rightarrow 2\left(w^2 - 1\right) = -3w \Rightarrow 2w^2 + 3w - 2 = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula

$$w = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot (2)(-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

obteniendo dos soluciones

$$w_1 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 = -2$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w$, tenemos en cuenta además que w_1 y w_2 son dos números reales positivo y negativo respectivamente

$$iz_1 = \log\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + i\left(0 + 2k\pi\right) \Rightarrow z_1 = 2k\pi + \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow z_1 = 2k\pi + i\ln(2)$$

$$iz_2 = \log(-2) = \ln(2) + i\left(\pi + 2k\pi\right) \Rightarrow z_1 = \left(\pi + 2k\pi\right) + \frac{1}{i}\ln(2) \Rightarrow z_1 = \left(\pi + 2k\pi\right) - i\ln(2)$$

2. (1.0 puntos) Encuentra en $\mathbb{C}$ los puntos donde la función $f(z) = \left(x^3 + 3xy^2\right) + i\left(3x^2y + y^3\right)$ es derivable y calcule su derivada en esos puntos.

   Solución: Para que una función compleja de variable compleja sea derivable en un punto se deben verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto, por tanto para encontrar esos puntos planteamos dichas ecuaciones para la función del enunciado

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \left(x^3 + 3xy^2\right) \Rightarrow \begin{cases} u_x = 3x^2 + 3y^2 \\ u_y = 6xy \end{cases} \\ v(x,y) &= \left(3x^2y + y^3\right) \Rightarrow \begin{cases} v_x = 6xy \\ v_y = 3x^2 + 3y^2 \end{cases} \end{aligned}$$

   La primera ecuación es $u_x = v_y$, que podemos comprobar se cumple siempre

$$u_x = 3x^2 + 3y^2 = v_y$$

   La segunda ecuación es

$$u_y = -v_x \Rightarrow 6xy = -6xy$$

   Resolviendo

$$12xy = 0 \Rightarrow xy = 0$$

   cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} x &= 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \Rightarrow P = (0,y) \\ &\text{o} \\ y &= 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow Q = (x,0) \end{aligned}$$

   Las soluciones son los semiejes positivos OX y OY.

   Para calcular el valor de la derivada se utiliza la definición de derivada

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

   por tanto como $u_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2$ y $v_x(x,y) = 6xy$

$$\begin{aligned} P &= (0,y) \Rightarrow f'(P) = u_x(0,y) + iv_x(0,y) = 3y^2 \\ Q &= (x,0) \Rightarrow f'(P) = u_x(x,0) + iv_x(x,0) = 3x^2 \end{aligned}$$

3. (1.5 puntos) Determine, demostrando su existencia, una función $v(x, y)$ tal que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es entera en $\mathbb{C}$ y verifica que $f(0) = 1 + i$. La función $u(x, y)$ se define mediante:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x + e^x \cos(y)$$

Exprese f como función de $z = x + iy$.

Solución: Como se dice que $f(x, y)$ es entera, su parte real $u(x, y)$ debe ser una función armónica y cumplirá la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

Derivando $u(x, y)$ respecto x e y dos veces

$$\begin{aligned} u_x &= 3x^2 - 3y^2 - 1 + e^x \cos(y) \Rightarrow u_{xx} = 6x + e^x \cos(y) \\ u_y &= -6xy - e^x \operatorname{sen}(y) \Rightarrow u_{yy} = -6x - e^x \cos(y) \end{aligned}$$

Al sustituir en 1 se comprueba que $u(x, y)$ es armónica

$$(6x + e^x \cos(y)) + (-6x - e^x \cos(y)) = 0$$

Para el cálculo de la parte imaginaria de $f(x, y)$ (función $v(x, y)$), tenemos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, utilizando de nuevo que $f(x, y)$ es analítica.

Utilizando la primera de estas ecuaciones (aunque podemos utilizar la otra)

$$u_x = v_y \Leftrightarrow v_y = 3x^2 - 3y^2 - 1 + e^x \cos(y)$$

e integrando respecto a y obtenemos $v(x, y)$

$$v = \int 3x^2 - 3y^2 - 1 + e^x \cos(y)\ dy = \boxed{3x^2y - y^3 - y + e^x \operatorname{sen} y + \varphi(x)}$$

Para encontrar la función $\varphi(x)$ derivamos respecto de x

$$v_x = 6xy + e^x \operatorname{sen} y + \varphi'(x)$$

expresión que debe coincidir con $-u_y = -(-6xy - e^x \operatorname{sen} y)$, por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto

$$6xy + e^x \operatorname{sen} y + \varphi'(x) = 6xy + e^x \operatorname{sen} y$$

de donde

$$\varphi'(x) = 0$$

e integrando se obtiene

$$\varphi(x) = c \in \mathbb{R}$$

Finalmente la expresión para $v(x, y)$ es:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y + e^x \operatorname{sen} y + c$$

y $f(x, y)$ es de la forma

$$f(x, y) = \left(x^3 - 3xy^2 - x + e^x \cos y\right) + i\left(3x^2y - y^3 - y + e^x \operatorname{sen} y + c\right)$$

Es muy fácil comprobar que $f(x,y)$ se puede poner como función de z

$$f(z) = z^3 - z + e^z + ic$$

A partir de $f(0) = 1 + i$ calcularemos el valor de c

$$f(0) = (0)^3 - (0) + e^0 + ic = 1 + c = 1 + i \Rightarrow c = 1$$

y la función buscada es

$$\boxed{f(z) = z^3 - z + e^z + i}$$

4. (1.25 puntos) Se considera la función racional $f(z) = \dfrac{1}{(z-4)(z^2+4)}$. Calcule el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo

$$\mathcal{A}(0;2,4) = \{z \in \mathbb{C};\ 2 < |z| < 4\}.$$

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador para descomponer la función en fracciones simples. Está claro que una de las raíces es $z_1 = 4$, para las otras resolvemos la correspondiente ecuación

$$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{-4} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 2i \\ \\ z_3 = -2i \end{cases}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z^2+4)} = \frac{1}{(z-4)(z-2i)(z+2i)}$$

Como estamos buscando potencias de z, la descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z-2i)(z+2i)} = \left(\frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z-2i)(z+2i) + B(z-4)(z+2i) + C(z-4)(z-2i)}{(z-4)(z-2i)(z+2i)}$$

Por tanto

$$A(z-2i)(z+2i) + B(z-4)(z+2i) + C(z-4)(z-2i) = 1$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z = 4 \Rightarrow A(4-2i)(4+2i) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{20} \\ \\ z = 2i \Rightarrow B(2i-4)(2i+2i) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{-8-16i} = -\frac{1}{40} + \frac{1}{20}i \\ \\ z = -2i \Rightarrow C(-2i-4)(-2i-2i) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{-8+16i} = -\frac{1}{40} - \frac{1}{20}i \end{array}\right\}$$

Dejaremos los coeficientes A, B y C de forma indicada.

El desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $2 < |z| < 4$ de cada fracción es muy sencillo.

Como $|z| < 4 \Rightarrow \frac{|z|}{4} < 1$, entonces

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = \boxed{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}} \text{ con } \left|\frac{z}{4}\right| < 1$$

Como $2 < |z| \Rightarrow \left|\frac{2i}{z}\right| = \frac{2}{|z|} < 1$ y el desarrollo para esta fracción es:

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n}{z^{n+1}}} \text{ con } \left|\frac{2i}{z}\right| < 1$$

Finalmente como $\left|\frac{-2i}{z}\right| = \frac{2}{|z|} < 1$

$$\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z}\right)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2i)^n}{z^{n+1}}} \text{ con } \left|\frac{-2i}{z}\right| < 1$$

La función tendrá el siguiente desarrollo

$$f(z) = \left(\frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}\right) = \left(-A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n}{z^{n+1}} + C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2i)^n}{z^{n+1}}\right)$$

agrupamos las potencias negativas y positivas:

$$f(z) = \left(-A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(B(2i)^n + C(-1)^n(2i)^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

y cambiando el contador en el segundo sumatorio $n+1 \Rightarrow n$

$$f(z) = \left(-A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B(2i)^{n-1} + C(-1)^{n-1}(2i)^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}\right)$$

También es posible realizar el desarrollo de la siguiente forma, teniendo en cuenta que la función se puede descomponer como

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z^2+4)} = \frac{a}{z-4} + \frac{bz+c}{z^2+4}$$

la primera fracción es igual que en el apartado anterior

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\dfrac{z}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{z^n}{4^{n+1}}$$

La otra fracción $\frac{1}{z^2+4}$, teniendo en cuenta que $2 < |z| \Rightarrow 4 < |z|^2$ y por tanto

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\dfrac{4}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z^2}\right)^n = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^{2n}}$$

y el desarrollo es:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a}{z-4}+\frac{bz+c}{z^2+4}=a\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{z^n}{4^{n+1}}+(bz+c)\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^{2n}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{az^n}{4^{n+1}}+bz\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^{2n}}+c\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^{2n}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{az^n}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}b(-1)^n\frac{4^n}{z^{2n+1}}+c\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^{2n+2}}
\end{aligned}$$

5. Calcule las siguientes integrales, indicando en cada caso el tipo de singularidades del integrando:

   (a) (1.25 punto) Para cada valor de $n \geq 0$
   $$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^n}dz; \quad \gamma(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

   (b) (1.25 punto)
   $$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2}dz; \quad \gamma(t)=\pi+3e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

   (c) (1.25 punto)
   $$\int_\gamma z^6\left(e^{\frac{1}{z}}+\operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\right)dz; \quad \gamma(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

Solución:

(a) La función $\dfrac{e^z-1}{z^n}$ es un cociente de funciones enteras, por tanto es derivable en todas partes salvo en los complejos que anulan el denominador, es decir:

$$z^n=0 \Leftrightarrow z=0$$

la única singularidad es $z=0$, sin embargo hay que tener en cuenta el valor de n. Para $n=0$, tendremos

$$n=0 \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z-1}{z^0}dz=\int_\gamma (e^z-1)\,dz$$

Como el integrando es una función entera (sin singularidades) y la curva es cerrada, el teorema de Cauchy-Gourssat nos dice que la integral es 0.
Para $n=1$

$$n=1 \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z-1}{z}dz$$

el integrando tiene una única singularidad $z_0=0$, pero que es evitable puesto que

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\left(\mathrm{L'Hôpital}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{1}=1$$

por tanto la integral vuelve a ser 0

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z}dz=0$$

Para $n > 1$, $z_0 = 0$ es un polo de orden $n-1$

$$\lim_{z\to 0} z^{n-1}\frac{e^z-1}{z^n} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$$

por tanto el residuo de la función en esa singularidad es utilizando el desarrollo de Laurent

$$\frac{e^z-1}{z^n} = \frac{1}{z^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-1\right) = \frac{1}{z^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-n}}{k!}$$

El residuo es el coeficiente de $\frac{1}{z} = z^{-1}$, es decir

$$k-n=-1 \Rightarrow k=n-1 \Rightarrow \mathrm{Res}\left(\frac{e^z-1}{z^n},0\right) = \frac{1}{(n-1)!}$$

$=n$	$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^n}dz$	Singularidades	Teorema	Valor de la Integral
0	$\int_\gamma (e^z-1)\,dz$	No tiene	Cauchy-Gourssat	0
1	$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z}dz$	Singularidad Evitable	Cauchy-Gourssat	0
≥ 1	$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^n}dz$	Polo de orden $n-1$	Residuos	$\frac{2\pi i}{(n-1)!}$

También es posible utilizar la formula integral de Cauchy para las derivadas

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

en este caso tendremos

$$\begin{aligned} f(z) &\rightarrow e^z-1 \\ z_0 &\rightarrow 0 \\ n+1 &\rightarrow n \end{aligned}$$

así que

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^{(n-1)+1}}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

salvo para los casos $n=0$ y $n=1$, y donde hemos tenido en cuenta que si $f(z) = e^z-1$, entonces $f^{(n)}(z) = e^z$ para $n \geq 1$.

(b) La función del integrando es un racional, por tanto sus singularidades son los ceros del denominador que se pueden obtener muy fácilmente ya que éste está factorizado

$$z^2(z-2)(z-\pi)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_3 = \pi \end{cases}$$

Es muy sencillo comprobar que tanto $z_1 = 0$ como z_3 son polos de orden 2, mientras que 2 es un polo simple, para ello utilizamos los límites

$$\begin{cases} \lim_{z\to 0} \dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow z_1 = 0 \text{ es un polo} \\ \\ \lim_{z\to 0} z^2 \dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2} = \lim_{z\to 0} \dfrac{z^2+1}{(z-2)(z-\pi)^2} = -\dfrac{1}{2\pi^2} \neq 0 \Rightarrow \text{orden } 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{z\to 2} \dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2} = \dfrac{4}{0} = \infty \Rightarrow z_2 = 2 \text{ es un polo} \\ \\ \lim_{z\to 2} (z-2) \dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2} = \lim_{z\to 2} \dfrac{z^2+1}{z^2(z-\pi)^2} = \dfrac{5}{4(2-\pi)^2} \neq 0 \Rightarrow \text{orden } 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{z\to \pi} \dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2} = \dfrac{\pi^2+1}{0} = \infty \Rightarrow z_3 = \pi \text{ es un polo} \\ \\ \lim_{z\to \pi} (z-\pi)^2 \dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2} = \lim_{z\to \pi} \dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)} = \dfrac{\pi^2+1}{\pi^2(\pi-2)} \neq 0 \Rightarrow \text{orden } 2 \end{cases}$$

Para el cálculo de la integral necesitamos los residuos de aquellas singularidades que estén dentro de la curva, que es una circunferencia de centro π y radio 3, luego es necesario comprobar la distancia de cada singularidad hasta el centro de la circunferencia y comprobar que esa distancia es menor que el radio. Claramente $z_3 = \pi$ están dentro de la curva (¡es su centro!).

$$\begin{aligned} d(\pi, z_1) &= d(\pi, 0) = |0-\pi| = |-\pi| = \pi > 3 \Rightarrow z_1 \notin \overset{\circ}{\gamma} \\ d(\pi, z_2) &= d(\pi, 2) = |2-\pi| = \pi - 2 < 3 \Rightarrow z_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \end{aligned}$$

Para calcular la integral tendremos en cuenta z_1 y z_3

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2}, 2 \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2}, \pi \right) \right)$$

Para $z_2 = 2$ que es un polo simple, el residuo coincide con el límite calculado

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2}, 2 \right) = \boxed{\frac{5}{4(2-\pi)^2}}$$

Al ser $z_3 = \pi$ de orden 2 el residuo viene dado por la expresión

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2}, \pi \right) = \lim_{z\to\pi} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left((z-\pi)^2 \frac{z^2+1}{z^2(z-2)} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2+1}{z^2(z-2)} \right)$$

$$\varphi(z) = \frac{z^2+1}{z^2(z-2)} \Rightarrow \varphi'(z) = \frac{2z^3(z-2) - (z^2+1)(2z(z-2)+z^2)}{z^4(z-2)^2} = \frac{-(z^3+3z-4)}{z^3(z-2)^2}$$

y el valor del residuo

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2},\pi\right)=\boxed{\frac{-\left(\pi^3+3\pi-4\right)}{\pi^3(\pi-2)^2}}$$

y el valor de la integral es

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2(z-2)(z-\pi)^2}dz=2\pi i\left(\frac{5}{4(2-\pi)^2}+\frac{-\left(\pi^3+3\pi-4\right)}{\pi^3(\pi-2)^2}\right)=2\pi i\frac{1}{4}\frac{\pi+4}{\pi^3}$$

(c) La función del integrando $z^6\left(e^{\frac{1}{z}}+\operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\right)$ tiene una única singularidad $z_0=0$ que es esencial porque está dentro del argumento de dos funciones trascendentales, exponencial y seno complejo. Para el cálculo de la integral necesitamos los residuos de aquellas singularidades que estén dentro de la curva, que es una circunferencia de centro 0 y radio 1, y está claro que $z_0=0$ está en el interior, puesto que es su centro. Para calcular el residuo hay que utilizar las series de Laurent de las dos funciones:

$$z^6\left(e^{\frac{1}{z}}+\operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\right)=z^6\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-6}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z^{4n-4}}\right)$$

el residuo será el coeficiente de $\frac{1}{z}$ que hay que extraer de cada uno de los sumatorios

$$\text{(Primer Sumatorio)} \quad \Rightarrow \quad n-6=1 \Leftrightarrow n=7$$

$$\text{(Segundo Sumatorio)} \quad \Rightarrow \quad 4n-4=1 \Leftrightarrow \text{No hay ningún valor}$$

El valor del residuo es

$$\operatorname{Res}\left(z^6\left(e^{\frac{1}{z}}+\operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\right),0\right)=\frac{1}{6!}$$

y la integral

$$\int_\gamma z^6\left(e^{\frac{1}{z}}+\operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\right)dz=\frac{2\pi i}{6!}$$

6. (1.5 puntos) Utilice la transformada Z para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2}-2y_{n+1}-3y_n=2^{n-1}, \qquad (n\in\mathbb{N}, n\geq 0)$$

con las condiciones iniciales $y_0=0, y_1=1$.

Solución: Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2}-2y_{n+1}-3y_n=2^{n-1}$$

junto con las condiciones iniciales $y_0=0$, $y_1=1$, aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2}-2y_{n+1}-3y_n=2^{n-1}\right](z)=\mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right](z)-2\mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right](z)-3\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)=\mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right](z) &= z^{2}\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)-z^{2}y_{0}-zy_{1}=z^{2}\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)-z\\ \mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right](z) &= z\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)-zy_{0}=z\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)\\ \mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z) &= \mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}\left(z^{2}\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)-z\right)-2\left(z\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z)\right)-3\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z) &= \mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)\\ \left(z^{2}-2z-3\right)\mathcal{Z}\left[y_{n}\right](z) &= \mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)+z\end{aligned}$$

y despejando

$$\boxed{\mathcal{Z}\left(y_{n}\right)[z]=\frac{\mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)+z}{\left(z^{2}-2z-3\right)}}$$

El valor de $\mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)$ lo obtenemos mediante la aplicación directa la definición de transformada $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[x_{n}\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_{n}}{z^{n}}\Rightarrow\mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^{n}}$$

multiplicamos y dividios por 2

$$\mathcal{Z}\left[2^{n-1}\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{2^{n}}{z^{n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{z}{2\left(z-2\right)}$$

y por fin

$$\mathcal{Z}\left(y_{n}\right)[z]=\frac{\frac{z}{2(z-2)}+z}{\left(z^{2}-2z-3\right)}=\frac{2z^{2}-3z}{2\left(z-2\right)\left(z-3\right)\left(z+1\right)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_{n}=\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{2z^{2}-3z}{2\left(z-2\right)\left(z-3\right)\left(z+1\right)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples:

$$\frac{2z^{2}-3z}{2\left(z-2\right)\left(z-3\right)\left(z+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{2z^{2}-3z}{\left(z-2\right)\left(z-3\right)\left(z+1\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\left(z-2\right)}+\frac{B}{z-3}+\frac{C}{z+1}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A\left(z-3\right)\left(z+1\right)+B\left(z-2\right)\left(z+1\right)+C\left(z-2\right)\left(z-3\right)}{\left(z-2\right)\left(z-3\right)\left(z+1\right)}$$

Por tanto

$$A\left(z-3\right)\left(z+1\right)+B\left(z-2\right)\left(z+1\right)+C\left(z-2\right)\left(z-3\right)=2z^{2}-3z$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z=2 \Rightarrow A(2-3)(2+1)=2(2)^2-3(2) \Rightarrow -3A=2 \Rightarrow A=-\dfrac{2}{3} \\ \\ z=3 \Rightarrow B(3-2)(3+1)=2(3)^2-3(3) \Rightarrow 4B=9 \Rightarrow B=\dfrac{9}{4} \\ \\ z=-1 \Rightarrow C(-1-2)(-1-3)=2(-1)^2-3(-1) \Rightarrow 12C=5 \Rightarrow C=\dfrac{5}{12} \end{array}\right\}$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0,r,\infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z|>2 \\ \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} \quad |z|>3 \\ \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \quad |z|>1 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2-3z}{(z-2)(z-3)(z+1)}\right) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\frac{9}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}+\frac{5}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}\right) \quad |z|>3 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}2^{n-1}+\frac{9}{4}3^{n-1}+\frac{5}{12}(-1)^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} \quad |z|>3 \end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}2^{n-1}+\frac{9}{4}3^{n-1}+\frac{5}{12}(-1)^{n-1}\right) \quad n\geq 1$$

mientras que

$$y_0=0$$

Es posible expresar y_n como

$$\boxed{y_n=\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2^n}{3}+\tfrac{3}{4}3^n-\tfrac{5}{12}(-1)^n\right)}$$

Podemos comprobar que para $n=1$, se obtienen los valores de las condiciones iniciales

$$y_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}3-\frac{5}{12}(-1)\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{9}{4}+\frac{5}{12}\right)=1$$

También es válido para $n=0$

$$y_0=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)=0$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.