Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electrónica Industrial, Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 1 de julio de 2011

1. Expresa el número complejo $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ en forma polar o exponencial.

   Solución:

$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arctan -1, \text{ como } z \text{ está en el } 4^o \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

2. Calcula el inverso de $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Aplicamos la definición de inverso para $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Calcula el módulo de $z = \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)}{(1-2i)}$.

   Solución: No es necesario realizar las operaciones para pasarlo a forma binómica, ya que se utilizan las propiedades de los módulos

$$|z| = \left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)}{(1-2i)}\right| = \frac{\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\left|(-1 + i\sqrt{3})\right|}{|1-2i|} = \frac{1 \cdot \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}}{\left(\sqrt{1^2 + (-2)^2}\right)} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

4. Calcula $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^6$ expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Ponemos en forma polar o exponencial

$$\text{Módulo: } |z| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 4^o \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

   Si ahora elevamos a 6 utilizando la definición de potencia entera de un complejo en forma polar

$$z^6 = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^6 = 2^6 e^{-i6\pi/3} = 2^6 e^{-i2\pi} = 2^6 = 64$$

5. Calcula $z=\sqrt[3]{-i}$ y escribe los resultados en forma binómica.

Solución: Escribimos el número $-i$ en forma polar

$$\text{Módulo: } |z| = \quad |-i| = 1$$

$$\text{Argumento: Como } z \text{ es un número imaginario puro, con parte imaginaria negativa } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Las raíces cúbicas de z son

$$w_k = \sqrt[3]{|z|}e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{3} = \frac{3\pi/2+2k\pi}{3} = \frac{3\pi+4k\pi}{6} \text{ con } k=0,1,2$$

por tanto, teniendo en cuenta que $|z|=1$ y por tanto $|w_k| = \sqrt[3]{1} = 1$

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\varphi_0} = e^{i\pi/2} = i \\ w_1 &= e^{i\varphi_1} = e^{i7\pi/6} = e^{i(\pi+\pi/6)} = -e^{i\pi/6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ w_2 &= e^{i\varphi_2} = e^{i11\pi/6} = e^{i(2\pi-\pi/6)} = e^{-i\pi/6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

6. Calcula $z=\dfrac{2+i}{3+i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Para dividir ambos complejos, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i+3i-i^2}{|3+i|^2} = \frac{7+i}{9+1} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$$

7. Calcula $(1+i)\overline{(3-i)}$ y expresa resultado en forma binómica.

Solución: Operamos normalmente utilizando el producto entre complejos

$$(1+i)\overline{(3-i)} = (1+i)(3+i) = 3+i+3i+i^2 = 2+4i$$

8. Calcula $z=\dfrac{(3+2i)\,i^{16}}{i^{247}(1-i)^{30}}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de i.

$$\begin{aligned} (1-i)^{30} &= \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{30} = 2^{15}e^{-i30\pi/4} = 2^{15}e^{-i7\pi}e^{-i\pi/2} = i2^{15} \\ 16 &= 4\cdot 4 \Rightarrow i^{16} = i^0 = 1 \\ 247 &= 4\cdot 61 + 3 \Rightarrow i^{247} = i^3 = -i \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{(3+2i)\,i^{16}}{i^{247}(1-i)^{30}} = \frac{(3+2i)\cdot 1}{(-i)\cdot(i2^{15})} = \frac{3}{2^{15}} + i\frac{2}{2^{15}}$$

9. Calcula y expresa $z = (1 - i\sqrt{3})\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ en forma polar o exponencial.

   Solución: Si hacemos el producto en forma binómica obtendremos

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} = -3 - i3\sqrt{3}$$

   que en forma polar es muy sencillo de expresar:

$$\text{Módulo: } |z| = \left|-3 - i3\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{-3\sqrt{3}}{-3} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 3^o \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$6e^{i4\pi/3}$$

   También es posible realizar el cálculo en forma exponencial, poniendo cada número en dicha forma. Para el complejo $1 - i\sqrt{3}$ ya hemos obtenido su expresión polar en el ejercicio 4

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$$

   Para el segundo complejo $\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{-3\sqrt{3}/2}{3/2} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 4^{er} \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

   Y podemos hacer el producto en forma exponencial

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2e^{-i\pi/3}\right)\left(3e^{-i\pi/3}\right) = 6e^{-i2\pi/3} = 6^{i4\pi/3}$$

10. Calcula y expresa $z = \dfrac{(1 - i\sqrt{3})}{\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ en forma polar o exponencial.

   Solución: La forma exponencial para los complejos del numerador y denominador ya se obtuvieron en el ejercicio anterior, por tanto lo único que nos queda por hacer es realizar la operación cociente en forma polar

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})}{\left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2e^{-i\pi/3}}{3e^{-i\pi/3}} = \frac{2}{3}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica Industrial
Examen de problemas, 1 de julio de 2011

OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

1.- Responda razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.
2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.
3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.
4.- Utilice resultados exactos, sin decimales, recuerde que **no está permitido** el uso de calculadora.

---

1. (0.5 puntos) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación siguiente:

$$\cos^2(z) + i = \frac{1}{2}.$$

Solución: Utilizaremos la definición de $\cos z$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación como:

$$\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + i = \frac{1}{2}$$

Desarrollamos el cuadrado

$$\frac{e^{i2z}+e^{-i2z}+2e^{iz}e^{-iz}}{4} + i = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{i2z}+e^{-i2z}+2}{4} + i = \frac{1}{2}$$

Y a continuación hacemos el siguiente cambio de variable

$$e^{2iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-2iz} = \frac{1}{e^{2iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w+\frac{1}{w}+2}{4} + i = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{w^2+2w+1}{4w} + i = \frac{1}{2}$$

y multiplicando por $4w$ obtenemos una ecuación de segundo grado

$$\left(w^2+2w+1\right) + i4w = 2w \Rightarrow w^2 + i4w + 1 = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula

$$\begin{aligned} w &= \frac{-4i \pm \sqrt{(4i)^2 + 4\cdot(1)(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{-4i \pm \sqrt{-16-4}}{2} = \frac{-4i \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{-4i \pm \sqrt{20}i}{2} \\ &= \frac{-4i \pm \sqrt{4\cdot 5}i}{2} = \frac{-4i \pm 2\sqrt{5}i}{2} = -2i \pm \sqrt{5}i = \left(-2 \pm \sqrt{5}\right)i \end{aligned}$$

obteniendo dos soluciones

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(-2+\sqrt{5}\right) i \\ w_2 &= \left(-2-\sqrt{5}\right) i \end{aligned}$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{2iz} = w \Rightarrow i2z = \log w$, tenemos en cuenta además que w_1 y w_2 son dos números imaginarios puros con parte imaginaria positiva y negativa respectivamente (ten en cuenta que $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$)

$$i2z_1 = \log\left(\left(-2+\sqrt{5}\right) i\right) = \ln\left(\sqrt{5}-2\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow z_1 = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) - \frac{i}{2}\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$$

$$i2z_2 = \log\left(\left(-2-\sqrt{5}\right) i\right) = \ln\left(\sqrt{5}+2\right) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow z_2 = \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) - \frac{i}{2}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$$

2. (0.75 puntos) Utilice la fórmula de Moivre para expresar $\operatorname{sen}(2x)$ y $\cos(2x)$ en función se $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

   Solución: El teorema de Moivre indica que para $n \in \mathbb{N}$ ocurre la siguiente relación

   $$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

   en este caso $n = 2$, por tanto

   $$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$$

   y desarrollando el cuadrado del primer miembro

   $$\cos^2 x + (i \operatorname{sen} x)^2 + i2\cos x \operatorname{sen} x = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$$

   como $i^2 = -1$, tenemos

   $$\cos^2 x - i \operatorname{sen}^2 x + i2\cos x \operatorname{sen} x = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$$

   e identificando partes reales e imaginarias encontraremos las conocidas fórmulas del ángulo doble

   $$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ \operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \end{aligned}$$

3. (1.5 puntos) Determine, demostrando su existencia, una función $u(x,y)$ tal que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es entera en $\mathbb{C}$ y verifica que $f(i) = 1 + 2i$. La función $v(x,y)$ se define mediante:

   $$v(x,y) = 2y^2 - 2x^2 + 3xy^2 - x^3 - x$$

   Exprese f como función de $z = x + iy$.

   Solución: Como se dice que $f(x,y)$ es entera, su parte imaginaria $v(x,y)$ debe ser una función armónica y cumplirá la ecuación

   $$v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{1}$$

Derivando $v(x,y)$ respecto x e y, una vez

$$\begin{aligned} v_x &= -4x + 3y^2 - 3x^2 - 1 \\ v_y &= 4y + 6xy \end{aligned}$$

y otra vez

$$\begin{aligned} v_{xx} &= -4 - 6x \\ v_{yy} &= 4 + 6x \end{aligned}$$

Al sustituir en 1 se obtiene

$$(-4 - 6x) + (4 + 6x) = 0$$

luego $v(x,y)$ es armónica.

Para el cálculo de la parte real de $f(x,y)$ (función $u(x,y)$), tenemos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, utilizando de nuevo que $f(x,y)$ es analítica.

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Utilizando la primera de estas ecuaciones (aunque podemos utilizar la otra)

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x = 4y + 6xy$$

e integrando respecto a x obtenemos la siguiente expresión para $u(x,y)$

$$u = \int (4y + 6xy)\ dx = 4xy + 3x^2y + \varphi(y)$$

Para encontrar la función $\varphi(y)$ derivamos respecto de y

$$u_y = 4x + 3x^2 + \varphi'(y)$$

expresión que debe coincidir con $-v_x = -\left(-4x + 3y^2 - 3x^2 - 1\right)$, por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto

$$4x + 3x^2 + \varphi'(y) = 4x - 3y^2 + 3x^2 + 1$$

de donde

$$\varphi'(y) = -3y^2 + 1$$

e integrando se obtiene

$$\varphi(y) = -y^3 + y + c \in \mathbb{R}$$

Finalmente la expresión para $u(x,y)$ es:

$$u(x,y) = 4xy + 3x^2y - y^3 + y + c$$

y $f(x,y)$ es de la forma

$$f(x,y) = \left(4xy + 3x^2y - y^3 + y + c\right) + i\left(2y^2 - 2x^2 + 3xy^2 - x^3 - x\right)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces es fácil comprobar que podemos expresar $f(x, y)$ como una función de z

$$f(z) = -iz^3 - 2iz^2 - iz + c$$

A partir de $f(i) = 1 + 2i$ calcularemos el valor de c

$$f(i) = -i(i)^3 - 2i(i)^2 - i(i) + c = -1 + 2i + 1 + c = c + 2i$$

por tanto

$$c + 2i = 1 + 2i \Leftrightarrow c = 1$$

y la función buscada es

$$f(z) = -iz^3 - 2iz^2 - iz + 1$$

4. (1.25 puntos) Se considera la función racional $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1/4)(z^2-4z-12)}$. Calcule el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo

$$\mathcal{A}(0; 2, 6) = \{z \in \mathbb{C};\ 2 < |z| < 6\}.$$

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador para descomponer la función en fracciones simples. Está claro que una de las raíces es $z_1 = 1/4$, para las otras resolvemos la correspondiente ecuación

$$z^2 - 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = \frac{4+8}{2} = 6 \\ z_3 = \frac{4-8}{2} = -2 \end{cases}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1/4)(z^2-4z-12)} = \frac{z^2}{(z-1/4)(z+2)(z-6)}$$

Como estamos buscando potencias de z, la descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1/4)(z+2)(z-6)} = \left(\frac{A}{z-1/4} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-6}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z+2)(z-6) + B(z-1/4)(z-6) + C(z-1/4)(z+2)}{(z-1/4)(z+2)(z-6)}$$

Por tanto

$$A(z+2)(z-6) + B(z-1/4)(z-6) + C(z-1/4)(z+2) = z^2$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{4} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{4} + 2\right)\left(\dfrac{1}{4} - 6\right) = \dfrac{1}{16} \Rightarrow A = -\frac{1}{207} \\[2ex] z = -2 \Rightarrow B(-2 - 1/4)(-2 - 6) = 4 \Rightarrow B = \frac{2}{9} \\[2ex] z = 6 \Rightarrow C(6 - 1/4)(6 + 2) = 9 \Rightarrow C = \frac{18}{23} \end{array}\right\}$$

y la descomposición es

$$\frac{z^2}{(z-1/4)\,(z+2)\,(z-6)} = \left(\frac{-1}{207\,(z-1/4)} + \frac{2}{9\,(z+2)} + \frac{18}{23\,(z-6)}\right)$$

El desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $2<|z|<6$ de cada fracción es muy sencillo. Como $2<|z| \Rightarrow \dfrac{1}{4} < 2 < |z| \Rightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{2}{|z|} < 4$ y dividiendo por $4 \Rightarrow \frac{1}{|4z|} < \frac{2}{|4z|} < 1$, y entonces

$$\frac{1}{z-1/4} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{4z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{1}{z^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{1}{4z}\right| < 1$$

De nuevo como $2<|z| \Rightarrow \frac{2}{|z|} < \frac{|z|}{|z|} < 1$ y el desarrollo para esta fracción es:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{z^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

Finalmente como $|z|<6 \Rightarrow \frac{|z|}{6} < 1$

$$\frac{1}{z+6} = \frac{1}{6\left(\frac{z}{6}-1\right)} = \frac{-1}{6}\frac{1}{1-\frac{z}{6}} = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{z}{6}\right| < 1$$

La función tendrá el siguiente desarrollo

$$f(z) = \left(\frac{-1}{207\,(z-1/4)} + \frac{2}{9\,(z+2)} + \frac{18}{23\,(z-6)}\right) = \left(-\frac{1}{207}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{z^{n+1}} - \frac{18}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}}\right)$$

agrupamos las potencias negativas y positivas:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^n} + \frac{2}{9}(-1)^n\,2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{18}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^{n+1}}$$

o simplificando

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{207}\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{9}(-1)^{n+1}\,2^{n+1}\right)\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{3}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^n}$$

y cambiando el contador en la primera suma $n+1 \Rightarrow n$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{207}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{9}(-1)^n\,2^n\right)\frac{1}{z^n} - \frac{3}{23}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{6^n}$$

5. Calcule las siguientes integrales

   (a) (1 punto)

$$\int_\gamma \frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)}dz; \quad \gamma(t) = \pi + 10e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

(b) (1 punto)

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}dz; \quad \gamma(t) = 3e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

(c) (1 punto)

$$\int_\gamma \frac{z}{(3z^2-10iz-3)^2}dz; \quad \gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Solución:

(a) La función $\frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)}$ es un cociente de funciones enteras (un polinomio en el numerador y la función seno complejo en el denominador), por tanto es derivable en todas partes salvo en los complejos que anulan el denominador, es decir:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{2} = k\pi \Leftrightarrow z_k = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

es decir, la función tiene infinitas singularidades, podemos comprobar que son todos polos, salvo para $k = 0$

$$\lim_{z\to z_k} \frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)} = \frac{2k\pi}{0} = \infty\ \forall k \neq 0$$

para el caso $k = 0$ tendremos una singularidad evitable, ya que

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)} = \frac{0}{0}$$

y aplicando L'Hôpital

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)} = \lim_{z\to 0} \frac{(z)'}{(\operatorname{sen}(z/2))'} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\cos(z/2)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

luego el límite de la función en 0 existe y por tanto es una singularidad evitable.

El resto de singularidades podemos comprobar que son todos polos de orden 1, es decir, polos simples, aplicamos L'Hôpital para encontrar el valor del límite puesto que la sustitución directa nos proporciona una singularidad del tipo $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_k} (z-z_k)\frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)} &= \lim_{z\to z_k} \frac{((z-z_k)z)'}{(\operatorname{sen}(z/2))'} = \lim_{z\to z_k} \frac{(z)+(z-z_k)}{\frac{1}{2}\cos(z/2)} = \\
&= \frac{z_k}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{z_k}{2}\right)} = \frac{2k\pi}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)} = (-1)^k\, 4k\pi \in \mathbb{C}-\{0\}
\end{aligned}$$

Sin embargo, no todas las singularidades contribuyen al cálculo de la integral, sólo aquellas que caen dentro de la curva. Para encontrar estas singularidades tendremos que comprobar que su distancia al centro es menor que el radio de la circunferencia.

$$d(0, z_k) = |z_k - 0| = |z_k| = |2k\pi - \pi| = \pi\,|2k-1|$$

Comparamos con el radio 10

$$\pi\,|2k-1| < 10 \Leftrightarrow |2k-1| < \frac{10}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{10}{\pi} < 2k-1 < \frac{10}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi-10}{2\pi} < k < \frac{\pi+10}{2\pi}$$

y teniendo en cuenta que $k \in \mathbb{Z}$, es fácil comprobar que las soluciones son

$$\begin{aligned}
k &= -1 \Rightarrow z_1 = -2\pi \\
k &= 0 \Rightarrow z_2 = 0 \\
k &= 1 \Rightarrow z_3 = 2\pi \\
k &= 2 \Rightarrow z_4 = 4\pi
\end{aligned}$$

Estas singularidades caen dentro de la circunferencia y todas son, salvo $z_2 = 0$ que es evitable, son de tipo polo, y por tanto el límite anterior es además el residuo de dicha singularidad

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)}, 2k\pi\right) = (-1)^k 4k\pi$$

y para las anteriores

$$\begin{aligned}
z_1 &= -2\pi \Rightarrow (k=-1) \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)}, -2\pi\right) = 4\pi \\
z_3 &= 2\pi \Rightarrow (k=1) \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)}, 2\pi\right) = -4\pi \\
z_4 &= 4\pi \Rightarrow (k=2) \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)}, 4\pi\right) = 8\pi
\end{aligned}$$

y la integral vale

$$\int_\gamma \frac{z}{\operatorname{sen}(z/2)} dz = 2\pi i \left(\sum_{z_k \in \mathring{\gamma}} \operatorname{Res}(f, z_k)\right) = 2\pi i \left(4\pi + (-4\pi) + 8\pi\right) = 16 i \pi^2$$

(b) La función del integrando $\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}$ es un cociente de dos funciones enteras, la función $\cos z$ y un polinomio, por tanto será derivable en todos los puntos, salvo cuando se anule el denominador. Planteamos la ecuación correspondiente:

$$z^2(z-\pi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = \pi \end{cases}$$

Es muy sencillo comprobar que $z_1 = 0$ es un polo de orden 2, mientras que π es un polo simple, para ello utilizamos los límites

$$\begin{cases} \lim_{z\to 0} \dfrac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)} = \frac{\cos(0)}{0^3(0-\pi)} = \infty \Rightarrow z_1 = 0 \text{ es un polo} \\ \lim_{z\to 0} z^2 \dfrac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)} = \lim_{z\to 0} \dfrac{\cos(z)}{(z-\pi)} = \dfrac{\cos 0}{0-\pi} = -\frac{1}{\pi} \neq 0 \Rightarrow \text{orden } 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{z\to\pi} \frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)} = \frac{\cos(\pi)}{\pi^2(\pi-\pi)} = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow z_2 = \pi \text{ es un polo} \\ \displaystyle\lim_{z\to\pi} (z-\pi)\frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)} = \lim_{z\to\pi}\frac{\cos(z)}{z^2} = \frac{\cos\pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi^2} \neq 0 \Rightarrow \text{orden } 1 \end{cases}$$

Para el cálculo de la integral necesitamos los residuos de aquellas singularidades que estén dentro de la curva, que es una circunferencia de centro 0 y radio 3, luego es necesario comprobar la distancia de cada singularidad hasta el centro de la circunferencia y comprobar que esa distancia es menor que el radio. Claramente $z_1 = 0$ están dentro de la curva (¡es su centro!). Para $z_2 = \pi$

$$d(0,\pi) = |\pi - 0| = |\pi| = \pi > 3$$

y por tanto z_2 no está en el interior de la curva. Para calcular la integral solo tendremos en cuenta la singularidad $z_1 = 0$

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}, 0\right)$$

Al ser de orden 2 el residuo viene dado por la expresión

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos(z)}{z-\pi}\right)$$

$$f(z) = \frac{\cos z}{z-\pi} \Rightarrow f'(z) = \frac{-(z-\pi)\operatorname{sen} z - \cos z}{(z-\pi)^2}$$

y el valor del residuo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}, 0\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz^2}\left(\frac{\cos(z)}{z-\pi}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{-(z-\pi)\operatorname{sen} z - \cos z}{(z-\pi)^2}\right) \\ &= \left(\frac{-(0-\pi)\operatorname{sen} 0 - \cos 0}{(0-\pi)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \end{aligned}$$

y el valor de la integral es

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)}, 0\right) = -\frac{2i}{\pi}$$

(c) La función del integrando $\frac{z}{(3z^2-10iz-3)^2}$ es una función racional compleja, por tanto será derivable en todos los números complejos, salvo en los ceros del denominador, que buscamos resolviendo la ecuación correspondiente:

$$\left(3z^2 - 10iz - 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{10i \pm \sqrt{(10i)^2 - 4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3} = \frac{10i \pm 8i}{6} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{10i+8i}{6} = 3i \\ z_3 = \frac{10i-8i}{6} = \dfrac{i}{3} \end{cases}$$

y la descomposición del polinomio sería

$$\left(3z^2 - 10iz - 3\right)^2 = \left(3\left(z - 3i\right)\left(z - \frac{i}{3}\right)\right)^2$$

Ninguna de estas raíces anula el numerador y como aparece un cuadrado entonces ambas son polos dobles. Como antes la integral sólo depende de las singularidades que caigan dentro de la curva que es una circunferencia y por tanto cerrada.

$$\begin{aligned} d\left(0, z_1\right) &= \left|0 - 3i\right| = \left|3i\right| = 3 > 1 \Rightarrow z_1 \notin \mathring{\gamma} \\ d\left(0, z_2\right) &= \left|0 - \frac{i}{3}\right| = \left|\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow z_2 \in \mathring{\gamma} \end{aligned}$$

Por tanto sólo tendremos en cuenta el residuo de la función en $\frac{i}{3}$.

$$\int_\gamma \frac{z}{\left(3z^2 - 10iz - 3\right)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f\left(z\right), \frac{i}{3}\right)$$

Al ser de orden 2 el residuo viene dado por la expresión

$$\operatorname{Res}\left(f\left(z\right), \frac{i}{3}\right) = \lim_{z \to \frac{i}{3}} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}\left(\left(z - \frac{i}{3}\right)^2 \frac{z}{\left(3z^2 - 10iz - 3\right)^2}\right) = \lim_{z \to \frac{i}{3}} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{9\left(z - 3i\right)^2}\right)$$

$$f\left(z\right) = \frac{z}{9\left(z - 3i\right)^2} \Rightarrow f'\left(z\right) = \frac{9\left(z - 3i\right)^2 - 18z\left(z - 3i\right)}{81\left(z - 3i\right)^4} = \frac{\left(z - 3i\right) - 2z}{9\left(z - 3i\right)^3} = -\frac{z + 3i}{9\left(z - 3i\right)^3}$$

y el valor del residuo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(f\left(z\right), \frac{i}{3}\right) &= \lim_{z \to \frac{i}{3}} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{9\left(z - 3i\right)^2}\right) \\ &= \lim_{z \to \frac{i}{3}} \left(-\frac{z + 3i}{9\left(z - 3i\right)^3}\right) \\ &= \left(-\frac{\frac{i}{3} + 3i}{9\left(\frac{i}{3} - 3i\right)^3}\right) \\ &= -\frac{5}{256} \end{aligned}$$

y la solución al problema será

$$\int_\gamma \frac{z}{\left(3z^2 - 10iz - 3\right)^2} dz = -\frac{5}{128}\pi i$$

6. (1 punto) Calcule, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(5 - 3\operatorname{sen}\left(t\right)\right)^2} dt \ .$$

Solución: Es una integral trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi]$, siendo el integrando una función en $(\operatorname{sen} t, \cos t)$ así que hacemos el cambio correspondiente

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \frac{z^2-1}{2zi} \\ dt &= \frac{1}{iz}dz \end{aligned}$$

y la integral se transforma en una integral a lo largo de la circunferencia unidad

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\operatorname{sen}(t))^2}dt = \int_\gamma \frac{1}{\left(5-3\frac{z^2-1}{2zi}\right)^2}\frac{1}{iz}dz; \quad \gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Operando en el integrando

$$\int_\gamma \frac{1}{\left(5-3\frac{z^2-1}{2zi}\right)^2}\frac{1}{iz}dz = \int_\gamma \frac{1}{\left(\frac{10zi-3z^2+3}{2zi}\right)^2}\frac{1}{iz}dz = \int_\gamma \frac{1}{\frac{(10zi-3z^2+3)^2}{(2zi)^2}}\frac{1}{iz}dz = \int_\gamma \frac{4zi}{(10zi-3z^2+3)^2}dz$$

que calcularemos mediante residuos. La integral anterior puede transformarese mediante unas simples operaciones en la siguiente

$$\int_\gamma \frac{4zi}{(10zi-3z^2+3)^2}dz = 4i\int_\gamma \frac{z}{((-1)(3z^2-10zi-3))^2}dz = 4i\int_\gamma \frac{z}{(3z^2-10zi-3)^2}dz$$

que resulta ser el mismo integrando que en el apartado (c) del ejercicio anterior, como además la curva es la misma, la circunferencia de centro 0 y radio 1, podemos utilizar el valor de la integral allí calculaday el valor de la integral será

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\operatorname{sen}(t))^2}dt = 4i\int_\gamma \frac{z}{(3z^2-10zi-3)^2}dz = 4i\left(-\frac{5}{128}\pi i\right) = \frac{5}{32}\pi$$

que como podemos comprobar es un número real como era de esperar para el valor de la integral.

7. (1.5 puntos) Utilice la transformada Z para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = \frac{1}{4^{n+1}},$$

con las condiciones iniciales $y_0 = 0, y_1 = 1$.

Solución: Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = \frac{1}{4^{n+1}}$$

junto con las condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) - 4\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) - 12\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right](z) &= z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-z^2y_0-zy_1=z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-z\\ \mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right](z) &= z\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-zy_0=z\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)\\ \mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= \mathcal{Z}\left[y_n\right](z)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}\left(z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)-z\right)-4\left(z\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)\right)-12\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)\\ \left(z^2-4z-12\right)\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)+z\end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)[z]=\frac{\mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)+z}{\left(z^2-4z-12\right)}$$

El valor de $\mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)$ lo obtenemos mediante la aplicación directa la definición de transformada $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}\Rightarrow\mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1/4^{n+1}}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}z^n}$$

podemos sacar un factor $\frac{1}{4}$ del sumatorio

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}z^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^nz^n}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4z}}=\frac{z}{4z-1}$$

y por fin

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)[z]=\frac{\frac{z}{4z-1}+z}{\left(z^2-4z-12\right)}=\frac{4z^2}{\left(4z-1\right)\left(z^2-4z-12\right)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n=\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{4z^2}{\left(4z-1\right)\left(z^2-4z-12\right)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Si observamos atentamente, veremos que esta función es la misma que la del ejercicio 4 (series de Laurent) ya que

$$\frac{4z^2}{\left(4z-1\right)\left(z^2-4z-12\right)}=\frac{4z^2}{4\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z^2-4z-12\right)}=\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z^2-4z-12\right)}$$

luego ya tenemos la descomposición buscada:

$$F(z)=\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z^2-4z-12\right)}=\left(\frac{-1}{207\left(z-1/4\right)}+\frac{2}{9\left(z+2\right)}+\frac{18}{23\left(z-6\right)}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0,r,\infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-\frac{1}{4}} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{4z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}z^n} \qquad |z|>1 \\
\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{z^n} \qquad |z|>2 \\
\frac{1}{z-6} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{6}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n-1}}{z^n} \qquad |z|>6
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z^2-4z-12\right)} &= \left(\frac{-1}{207}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}z^n} + \frac{2}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n} + \frac{18}{23}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n-1}}{z^n}\right) \qquad |z|>6 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{2}{9}(-1)^{n-1}2^{n-1} + \frac{18}{23}6^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} \qquad |z|>6
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = \left(-\frac{1}{207}\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{2}{9}(-1)^{n-1}2^{n-1} + \frac{18}{23}6^{n-1}\right) \qquad n \geq 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

Si tenemos en cuenta que $\frac{4}{4}=1$, que $18 = 6\cdot 3$ y que $(-1)^2 = 1$, es posible expresar y_n como

$$\boxed{y_n = \left(-\frac{4}{207}\frac{1}{4^n} - \frac{(-1)^n}{9}2^n + \frac{3}{23}6^n\right)}$$

Podemos comprobar que para $n=1$, se obtienen los valores de las condiciones iniciales

$$y_1 = \left(-\frac{4}{207}\frac{1}{4^1} - \frac{(-1)^1}{9}2^1 + \frac{3}{23}6^1\right) = -\frac{1}{207} + \frac{2}{9} + \frac{18}{23} = 1$$

También es válido para $n=0$

$$y_0 = \left(-\frac{4}{207}\frac{1}{4^0} - \frac{(-1)^0}{9}2^0 + \frac{3}{23}6^0\right) = -\frac{4}{207} - \frac{1}{9} + \frac{3}{23} = 0$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.