Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 13 de septiembre de 2010

1. Expresa el número complejo $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ en forma polar o exponencial.

   Solución:

$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arctan 1, \text{ como } z \text{ está en el } 1^{er} \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{4}$$

2. Calcula el inverso de $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Aplicamos la definición de inverso para $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Calcula el módulo de $z = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)}{(1-2i)}$.

   Solución: No es necesario realizar las operaciones para pasarlo a forma binómica, ya que se utilizan las propiedades de los módulos

$$|z| = \left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)}{(1-2i)}\right| = \frac{\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\left|(-1 + i\sqrt{3})\right|}{|1-2i|} = \frac{1 \cdot \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}}{\left(\sqrt{1^2 + (-2)^2}\right)} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

4. Calcula $z = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^6$ expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Ponemos en forma polar o exponencial

$$\text{Módulo: } |z| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 2^o \text{ cuadrante, } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

   Si ahora elevamos a 6 utilizando la definición de potencia entera de un complejo en forma polar

$$z^6 = \left(2e^{i2\pi/3}\right)^6 = 2^6 e^{i12\pi/3} = 2^6 e^{i4\pi} = 2^6 = 64$$

5. Calcula $z = \sqrt[3]{i}$ y escribe los resultados en forma binómica.

Solución: Escribimos el número 4 en forma polar

$$\text{Módulo: } |z| = \ \ |i| = 1$$

$$\text{Argumento: Como } z \text{ es un número imaginario puro } \theta = \frac{\pi}{2}$$

Las raíces cúbicas de z son

$$w_k = \sqrt[3]{|z|}e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{3} = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi + 4k\pi}{6} \text{ con } k = 0, 1, 2$$

por tanto, teniendo en cuenta que $|z| = 1$ y por tanto $|w_k| = \sqrt[3]{1} = 1$

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\varphi_0} = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ w_1 &= e^{i\varphi_1} = e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ w_2 &= e^{i\varphi_2} = e^{i9\pi/6} = -i \end{aligned}$$

6. Calcula $z = \dfrac{2-i}{3-i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Para dividir ambos complejos, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{2-i}{3-i} = \frac{(2-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+2i-3i-i^2}{|3+i|^2} = \frac{7-i}{9+1} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$$

7. Calcula $(1-i)\overline{(3+i)}$ y expresa resultado en forma binómica.

Solución: Operamos normalmente utilizando el producto entre complejos

$$(1-i)\overline{(3+i)} = (1-i)(3-i) = 3 - i - 3i + i^2 = 2 - 4i$$

8. Calcula $z = \dfrac{(3+2i)\,i^{17}}{i^{243}\,(1-i)^3}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de i.

$$\begin{aligned} (1-i)^3 &= -2-2i \\ 17 &= 4\cdot 4 + 1 \Rightarrow i^{17} = i^1 = i \\ 243 &= 4\cdot 60 + 3 \Rightarrow i^{413} = i^3 = -i \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{(3+2i)\,i^{17}}{i^{243}\,(1-i)^3} = \frac{(3+2i)\,i}{(-i)\cdot(-2-2i)} = \frac{3+2i}{2+2i} = \frac{(3+2i)(2-2i)}{8} = \frac{10}{8} - \frac{2}{8}i = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}i$$

9. Calcula y expresa $z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ en forma polar o exponencial.

Solución: Si hacemos el producto en forma binómica obtendremos

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{2} = -6$$

que como es un número negativo en forma polar es muy sencillo de expresar:

$$-6 = 6e^{i\pi}$$

También es posible realizar el cálculo en forma exponencial, poniendo cada número en dicha forma. Para el complejo $-1+i\sqrt{3}$ ya hemos obtenido su expresión polar en el ejercicio 4

$$-1+i\sqrt{3} = 2e^{i2\pi/3}$$

Para el segundo complejo $\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{3\sqrt{3}/2}{3/2} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 1^{er} \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

Y podemos hacer el producto en forma exponencial

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2e^{i2\pi/3}\right)\left(3e^{i\pi/3}\right) = 6e^{i\pi} = -6$$

10. Calcula y expresa $z = \dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{\left(\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ en forma polar o exponencial.

Solución: La forma exponencial para los complejos del numerador y denominador ya se obtuvieron en el ejercicio anterior, por tanto lo único que nos queda por hacer es realizar la operación cociente en forma polar

$$\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{\left(\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2e^{i2\pi/3}}{3e^{i\pi/3}} = \frac{2}{3}e^{i\pi/3}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 13 de septiembre de 2010

OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

1.- Responde razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.
2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.
3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.
4.- Utiliza resultados exactos, sin decimales, recuerda que **no está permitido** el uso de calculadora.

---

1. **(1 pto.)** Encuentra todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación

$$4 \operatorname{sen} z + 3i = 0$$

Utilizamos la definición de $\operatorname{sen} z$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación

$$4\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) + 3i = 0$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

y como $w \neq 0$

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$4\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} + 3i = 0 \Rightarrow 4\frac{w^2 - 1}{2iw} + 3i = 0 \Rightarrow 2\frac{w^2 - 1}{iw} + 3i = 0$$

y multiplicando por iw obtenemos una ecuación de segundo grado

$$2\left(w^2 - 1\right) + iw\,(3i) = 0 \Rightarrow 2w^2 - 3w - 2 = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula

$$w = \frac{3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot (2)\,(-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

obteniendo dos soluciones

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(\frac{3+5}{4}\right) = 2 \\ w_2 &= \left(\frac{3-5}{4}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, mediante la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w$

$$iz_1 = \log(2) = \ln(2) + i(0 + 2k\pi) \Rightarrow z_1 = 2k\pi - i\ln 2$$

$$iz_2 = \log\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + i(\pi + 2k\pi) \Rightarrow z_2 = (\pi + 2k\pi) + i\ln 2$$

2. (**1.25 ptos.**) Encuentra, demostrando su existencia, una función $u(x, y)$, de manera que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea entera y se cumpla $f(0) = 1$, siendo $v(x, y)$ definida por

$$\mathrm{Im}(f(z)) = v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + 3x^2y - y^3$$

Expresa f como función de z.

Solución: Como se dice que $f(x, y)$ es entera, su parte imaginaria $v(x, y)$ debe ser una función armónica y cumplirá la ecuación

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{1}$$

Derivando $v(x, y)$ respecto x e y, una vez

$$\begin{aligned} v_x &= 4x + 6xy \\ v_y &= -4y + 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

y otra vez

$$\begin{aligned} v_{xx} &= 4 + 6y \\ v_{yy} &= -4 - 6y \end{aligned}$$

Al sustituir en 1 se obtiene

$$(4 + 6y) + (-4 - 6y) = 0$$

luego $v(x, y)$ es armónica.

Para el cálculo de la parte real de $f(x, y)$ (función $u(x, y)$), tenemos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, utilizando de nuevo que $f(x, y)$ es analítica.

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Utilizando la primera de estas ecuaciones (aunque podemos utilizar la otra)

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x = -4y + 3x^2 - 3y^2$$

e integrando respecto a x obtenemos la siguiente expresión para $u(x, y)$

$$u = \int -4y + 3x^2 - 3y^2 \; dx = -4xy + x^3 - 3y^2x + \varphi(y)$$

Para encontrar la función $\varphi(y)$ derivamos respecto de y

$$u_y = -4x - 6yx + \varphi'(y)$$

expresión que debe coincidir con $v_x = -(4x + 6xy)$, por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto

$$-4x - 6yx + \varphi'(y) = -4x - 6xy$$

de donde

$$\varphi'(y) = 0$$

e integrando se obtiene

$$\varphi(y) = c \in \mathbb{R}$$

Finalmente la expresión para $u(x, y)$ es:

$$u(x, y) = -4xy + x^3 - 3y^2x + c$$

y $f(x, y)$ es de la forma

$$f(x, y) = \left(-4xy + x^3 - 3y^2x + c\right) + i\left(2x^2 - 2y^2 + 3x^2y - y^3\right)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f(x, y)$ como una función de z

$$f(z) = z^3 + 2iz^2 + c$$

Como $f(0) = 1$, podemos comprobar que $c = 1$.

3. **(1.25 ptos.)** Calcula el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^m(z^2 - 5z + 6)} \qquad m \in \mathbb{N}$$

en el anillo $A(0, 0, 2) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$. Calcula $\operatorname{Res}(f(z), 0)$ en función del valor de m.

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador para descomponer la función en fracciones simples. Está claro que una de las raíces es $z_0 = 0$, para las otras resolvemos la correspondiente ecuación

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ z_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{1}{z^m(z^2 - 5z + 6)} = \frac{1}{z^m(z-2)(z-3)}$$

Como estamos buscando potencias de z, la descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{z^m(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z^m}\left(\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z-3) + B(z-2)}{(z-2)(z-3)}$$

Por tanto

$$A(z-3) + B(z-2) = 1 \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} A = -1 \\ B = 1 \end{array}\right\}$$

y la descomposición es

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}$$

El desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $|z|<2$ de cada fracción es muy sencillo

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad \text{si } \left|\frac{z}{2}\right|<1\Rightarrow |z|<2$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{3\left(\frac{z}{3}-1\right)}=\frac{-1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\quad \text{si } \left|\frac{z}{3}\right|<1\Rightarrow |z|<3$$

por tanto como $|z|<2$, se cumplen las condiciones. La función tendrá el siguiente desarrollo

$$f(z)=\frac{1}{z^m}\left(-B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^{n-m}\quad \text{si } |z|<2$$

Para calcular el residuo buscaremos el coeficiente de la potencia $\frac{1}{z}$ que se obtiene fácilmente cuando $n-m=1$

$$n-m=1\Leftrightarrow m=n-1$$

y el residuo sería

$$\operatorname{Res}(f,0)=\left(\frac{1}{2^{m-1+1}}-\frac{1}{3^{m-1+1}}\right)=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{3^m}$$

4. Calcula las siguientes integrales sobre las curvas que se indican :

   (a) **(1.25 ptos.)** $\displaystyle\int_{\gamma_0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\,dz$, donde $\gamma_0(t)=4e^{it};\quad t\in[0,2\pi]$.

   (b) **(1.25 ptos.)** $\displaystyle\int_{\gamma_1}|z|^2\,dz$ siendo $\gamma_1(t)$ el segmento que une los complejos $z_0=0$ y $z_1=1+i$.

Solución:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\,dz$ es la integral de una función sobre una curva cerrada que sólamente tiene singularidades aisladas, que son los complejos que anulan el denominador

$$\operatorname{sen}(z)=0\Rightarrow z=k\pi\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Aunque hay infinitas singularidades, solamente hay que tener en cuenta aquellas que están de la curva γ_1, que es una circunferencia de radio 4. Por tanto hay que tener en cuenta las singularidades que cumplen

$$d(k\pi,0)\leq 4\Rightarrow |k\pi-0|=|k\pi|=|k|\,\pi<4$$

inecuación que tiene por soluciones $k=-1,0,1$. Las singularidades que nos interesan son

$$\begin{aligned} z_0 &= 0\\ z_1 &= \pi\\ z_2 &= -\pi \end{aligned}$$

y el valor de la integral es

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{z}{\operatorname{sen} z} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \left(\operatorname{Res} \left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}, z_k \right) \right)$$

La singularidad $z_0 = 0$ es evitable puesto que

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = 1$$

y su residuo será 0. Como las otras singularidades son simples el valor del residuo se puede obtener mediante el empleo de límites, o también utilizando que $f(z) = p(z)/q(z)$, siendo $p(z) = z$ y $q(z) = \operatorname{sen} z$ y se cumple además $p(z_k) \neq 0$, $q(z_k) = 0$ y $q'(z_k) = \cos z_k = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$ y por tanto

$$\operatorname{Res}(p(z)/q(z), z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{z_k}{\cos z_k}$$

Para cada singularidad

$$\begin{aligned} z_1 &= \pi \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}, \pi\right) = \frac{\pi}{\cos \pi} = -\pi \\ z_2 &= -\pi \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}, -\pi\right) = \frac{-\pi}{\cos -\pi} = \frac{-\pi}{-1} = \pi \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores de los residuos en la integral

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \left(\operatorname{Res} \left(\frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}, z_k \right) \right) = 2\pi i (0 - \pi + \pi) = 0$$

NOTA: Mediante límites y utilizando L'Hôpital

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi) z}{\operatorname{sen} z} = \lim_{z \to k\pi} \frac{2z - k\pi}{\cos z} = \frac{k\pi}{(-1)^k} = (-1)^k k\pi \neq 0$$

por tanto $k\pi$ son polos simples y además $\operatorname{Res}\left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}, k\pi\right) = (-1)^k k\pi$.

(b) $\int\limits_{\gamma_1} |z|^2 \, dz$ es la integral de una función no derivable a lo largo de la curva γ_1 que no es cerrada puesto que es un segmento

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= 0 \\ \gamma_1(1) &= 1 + i \end{aligned}$$

y por tanto $\gamma_1(0) \neq \gamma_1(1)$. De esta forma debemos calcular la integral mediante la definición de integral a lo largo de una curva. El segmento lineal que une dos complejos z_1 y z_2 puede parametrizarse de forma simple como

$$\gamma_1(t) = (1 - t) z_1 + t z_2 \quad t \in [0, 1]$$

que en nuestro caso

$$\gamma_1(t) = (1-t)\,0 + t\,(1+i) = t + it; \quad t \in [0,1]$$

con

$$\gamma_1'(t) = 1 + i; \quad t \in [0,1]$$

Si se sustituyen estos valores en la integral

$$\int_{\gamma_1} |z|^2\, dz = \int_0^1 |\gamma_1(t)|^2\, \gamma_1'(t)\, dt = \int_0^1 \left(t^2 + t^2\right)(1+i)\, dt$$

$$(1+i)\int_0^1 2t^2\; dt = (1+i)\left.\frac{2t^3}{3}\right|_0^1 = (1+i)\,\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

5. Calcula en función de $r > 0$, cada una de las siguientes integrales; indicando, cuando proceda, las singularidades y su tipo.

   (a) **(1.25 ptos.)** $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{3-z}{z^4 - 4z^3 + 3z^2}dz$, con $\gamma_2(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) **(1.25 ptos.)** $\int_{\gamma_3} (z-1)^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right) + (z-\pi)^3\, e^{1/(z-\pi)}\; dz$ con $\gamma_3(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución: Resolveremos cada integral de forma independiente:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{3-z}{z^4 - 4z^3 + 3z^2}dz$ integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada, por tanto tendremos que utilizar el teorema de los residuos. En primer lugar veremos quienes son las singularidades de la función racional, es decir, los ceros del denominador:

$$z^4 - 4z^3 + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2\left(z^2 - 4z + 3\right) = z^2(z-1)(z-3)$$

y la función puede expresarse como

$$\frac{3-z}{z^4 - 4z^3 + 3z^2} = \frac{3-z}{z^2(z-1)(z-3)}$$

Comprobaremos el tipo de singularidad

$$z_1 = 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{3-z}{(z-1)(z-3)} = \frac{3}{(-1)(-3)} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{ Polo doble}$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{3-z}{z^2(z-3)} = \frac{3-1}{(1)^2(1-3)} = -1 \Rightarrow \text{ Polo simple}$$

$$z_3 = 3 \Rightarrow \lim_{z\to 3} f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{3-z}{z^2(z-1)(z-3)} = \lim_{z\to 3} \frac{-1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{18} \Rightarrow \text{ Singularidad evitable}$$

El cálculo de los residuos de la función en z_2 y z_3 son directos. En un caso por ser polo simple es el límite calculado y en el otro caso por ser singularidad evitable su residuo será 0.

$$\operatorname{Res}(f,1) = -1$$

$$\operatorname{Res}(f,3) = 0$$

En el caso de $z_1 = 0$, al ser un polo doble tendremos que emplear la fórmula correspondiente

$$\operatorname{Res}(f,0) = \operatorname{Res}\left(\frac{3-z}{z^2(z-1)(z-3)},0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{3-z}{(z-1)(z-3)}}{z^2},0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{z^2},0\right) = \frac{\varphi'(0)}{1!}$$

y derivando φ

$$\varphi'(z) = \left[\frac{3-z}{(z-1)(z-3)}\right]' = \left[\frac{-1}{(z-1)}\right]' = \frac{1}{(z-1)^2}$$

y por tanto

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{\varphi'(0)}{1!} = 1$$

El valor de la integral depende del valor que tome r, ya que según este valor la curva (circunferencia) contendrá o no a las singularidades de la función. Calculamos las distancias del centro de la circunferencia a cada una de las singularidades:

$$z_1 = 0 \Rightarrow d(1,0) = |1-0| = |1| = 1$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow d(1,1) = |1-1| = 0$$

$$z_3 = 3 \Rightarrow d(1,3) = |1-3| = |-2| = 2$$

Teniendo en cuenta que

$$0 < 1 < 2$$

podemos distinguir los siguientes casos

$$\begin{cases} 0 < r < 1 \Rightarrow \begin{cases} z_2 \in \overset{\circ}{\gamma}_2 \\ z_1, z_3 \notin \overset{\circ}{\gamma}_2 \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,1)\right) = -2\pi i \\ 1 < r < 2 \Rightarrow \begin{cases} z_1, z_1 \in \overset{\circ}{\gamma}_2 \\ z_3 \notin \overset{\circ}{\gamma}_2 \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,0)\right) = 2\pi i(1-1) = 0 \\ r > 2 \Rightarrow \left\{ z_1, z_2, z_3 \in \overset{\circ}{\gamma}_2 \right. \Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,3)\right) = 0 \end{cases}$$

(b) Utilizando la propiedad de la linealidad en la integral

$$\int_{\gamma_3} (z-1)^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(z-1)^3}\right) + (z-\pi)^2 e^{1/(z-\pi)} dz$$

$$= \int_{\gamma_3} (z-1)^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right) dz + \int_{\gamma_3} (z-\pi)^3 e^{1/(z-\pi)} dz$$

La función $f_1(z) = (z-1)^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)$ tiene una única singularidad $z_1 = 1$, que es esencial ya que se encuentra en el argumento de una función trigonométrica. Utilizamos el desarrollo en series de potencias de la función $\operatorname{sen}(z)$ para obtener el desarrollo de Laurent de f_1 centrado en z_1

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \\
(z-1)^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right) &= (z-1)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{4n-3}}
\end{aligned}
$$

Para encontrar el residuo buscaremos en la serie anterior, el coeficiente que acompaña a la potencia $(z-z_0)^{-1} = \frac{1}{z-z_0}$

$$4n - 3 = 1 \Rightarrow 4n = 4 \Rightarrow n = 1$$

por tanto

$$\operatorname{Res}(f_1, 1) = \frac{(-1)^1}{(2 \cdot 1 + 1)!} = -\frac{1}{6}$$

La función $f_2(z) = (z-\pi)^3 e^{1/(z-\pi)}$ también tiene una única singularidad aislada, $z_2 = \pi$, y por estar dentro del argumento de la función exponencial también es esencial, para calcular el residuo de la función en esta singularidad utilizaremos un desarrollo de Laurent, en este caso de f_2 centrado en z_2. Utilizamos el desarrollo en series de potencias de la función e^z

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \Rightarrow (z-\pi)^3 e^{1/(z-\pi)} = (z-\pi)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z-\pi}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-\pi)^{n-3}}$$

Como antes, para econtrar el residuo, se busca en la serie el coeficiente que acompaña a la potencia $(z-z_0)^{-1} = \frac{1}{z-z_0}$

$$n - 3 = 1 \Rightarrow n = 4$$

por tanto

$$\operatorname{Res}(f_2, \pi) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver cuando cada singularidad cae dentro de la curva, como esta curva depende del radio r, tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0 = 0$ a la singularidades

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |1 - 0| = 1 \\
\\
z_2 &= \pi \Rightarrow |z_2 - z_0| = |\pi - 0| = \pi
\end{aligned}
$$

Notar que las funciones no comparten singularidades y afectan en cada caso a una y sólo una de las funciones

$$
\begin{aligned}
0 &< r < 1 \Rightarrow \left\{ z_1, z_2 \notin \mathring{\gamma} \right. \Rightarrow \int_{\gamma_3} f_1 \, dz + \int_{\gamma_3} f_2 \, dz = 0 \\
1 &< r < \pi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 \notin \mathring{\gamma} \\ \\ z_2 \in \mathring{\gamma} \end{array} \right. \Rightarrow \int_{\gamma_3} f_1 \, dz + \int_{\gamma_3} f_2 \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f_1, 1) + 0 = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}
\end{aligned}
$$

$$r > \pi \Rightarrow z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \int_{\gamma_3} f_1 \, dz + \int_{\gamma_3} f_2 \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f_1, 1) + 2\pi i \operatorname{Res}(f_2, 0) = \frac{-\pi i}{10} + 2\pi i \frac{1}{24} = -\frac{\pi}{60} i$$

6. Elige sólo una de las siguientes opciones:

OPCIÓN A.- (1.5 ptos.) Se considera la curva $\gamma_4(t) = 2e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$.

(a) Calcula

$$I(a) = \int_{\gamma_4} \frac{e^{z/a}}{z^2(z^2+1)} dz$$

(b) Deduce que $\lim_{a\to\infty} I(a) = 0$.

OPCIÓN B.- (1.5 ptos.) Utiliza la transformada $\mathcal{Z}$ para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = a \qquad a \neq 0$$

con condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = 0$.

Solución:

(a) Es la integral de una función con singularidades aisladas sobre una curva cerrada, por tanto utilizaremos el teorema de los residuos. Las singularidades de la función son los ceros del denominador de la función integrando y fácilmente obtenemos

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= i \\ z_2 &= -i \end{aligned}$$

y podemos comprobar que son polos de orden 2, 1 y 1

$$z_0 = 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{z/a}}{z^2+1} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{ Polo doble}$$

$$z_1 = i \Rightarrow \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{e^{z/a}}{z^2(z+i)} = \frac{e^{i/a}}{(i)^2(i+i)} = -\frac{e^{i/a}}{2i} \Rightarrow \text{ Polo simple}$$

$$z_2 = -i \Rightarrow \lim_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{e^{z/a}}{z^2(z-i)} = \frac{e^{-i/a}}{(-i)^2(-i-i)} = \frac{e^{-i/a}}{2i} \Rightarrow \text{ Polo simple}$$

Como la curva es una circunferencia de radio 2, todas las singularidades están dentro de la curva, por tanto para calcular la integral tenerlas todas en cuenta. Para los polos simples el residuo es el límite calculado anteriormente. Para el polo doble utilizamos la fórmula correspondiente

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{z/a}}{z^2(z^2+1)}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{z^2}, 0\right) = \varphi'(0)$$

siendo

$$\varphi'(z) = \left[\frac{e^{z/a}}{(z^2+1)}\right]' = \frac{(1/a)\, e^{z/a}\left(z^2+1\right) - 2ze^{z/a}}{(z^2+1)}$$

y

$$\text{Res}\left(\frac{e^{z/a}}{z^2\left(z^2+1\right)},0\right)=\varphi'\left(0\right)\acute{}=\frac{1}{a}$$

y el valor de la integral será

$$\int\limits_{\gamma_4}\frac{e^{z/a}}{z^2\left(z^2+1\right)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{a}-\frac{e^{i/a}}{2i}+\frac{e^{-i/a}}{2i}\right)$$

Utilizando la definición de $\operatorname{sen}\left(z\right)$ podemos poner

$$\int\limits_{\gamma_4}\frac{e^{z/a}}{z^2\left(z^2+1\right)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{a}-\operatorname{sen}\frac{1}{a}\right)$$

(b) Una vez expresada la integral de la forma anterior es muy sencillo comprobar que

$$\lim_{a\to\infty}I\left(a\right)=\lim_{a\to\infty}2\pi i\left(\frac{1}{a}-\operatorname{sen}\frac{1}{a}\right)=0$$

7. Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n=a \qquad a\neq 0$$

junto con las condiciones iniciales $y_0=0$, $y_1=0$, aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n\right]\left(z\right)=\mathcal{Z}\left[a\right]\left(z\right)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right]\left(z\right)-5\mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right]\left(z\right)+6\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)=\mathcal{Z}\left[a\right]\left(z\right)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right]\left(z\right)&=z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-z^2y_0-zy_1=z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)\\ \mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right]\left(z\right)&=z\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-zy_0=z\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)\\ \mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)&=\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-5z\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)+6\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)&=\mathcal{Z}\left[a\right]\left(z\right)\\ \left(z^2-5z+6\right)\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)&=\mathcal{Z}\left[a\right]\left(z\right)\end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)\left[z\right]=\frac{\mathcal{Z}\left[a\right]\left(z\right)}{\left(z^2-5z+6\right)}$$

El valor de $\mathcal{Z}\left[a\right]\left(z\right)$ lo obtenemos mediante la aplicación directa la definición de transformada $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[a\right]\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{z^n}=a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=a\frac{z}{z-1}$$

y por fin

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{a\frac{z}{z-1}}{(z^2-5z+6)} = \frac{az}{(z-1)(z^2-5z+6)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n = Z^{-1}\left(\frac{az}{(z-1)(z^2-5z+6)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Las raíces se obtienen fácilmente mediante Ruffini

$$z^2-5z+6 = (z-2)(z-3)$$

y la descomposición en fracciones simples será

$$F(z) = \frac{az}{(z-1)(z^2-5z+6)} = a\left(\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0,r,\infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad |z|>1 \\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z|>2 \\
\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} \quad |z|>3
\end{aligned}$$

Finalmente lo único que queda por hacer es calcular los valores de A, B, C

$$\frac{az}{(z-1)(z^2-5z+6)} = a\left(\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}\right)$$

y sumando las fracciones e igualando numeradores

$$A(z-2)(z-3)+B(z-1)(z-3)+C(z-1)(z-2) = z$$

Y dando a z los valores de las raíces $1, 2$ y 3

$$\begin{aligned}
z &= 1 \Rightarrow A(1-2)(1-3) = 1 \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \\
z &= 2 \Rightarrow B(2-1)(2-3) = 2 \Leftrightarrow -B = 2 \Leftrightarrow B = -2 \\
z &= 3 \Rightarrow C(3-1)(3-2) = 3 \Leftrightarrow 2C = 3 \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{az}{(z-1)(z^2-5z+6)} = a\left(\frac{1/2}{z-1}+\frac{-2}{z-2}+\frac{3/2}{z-3}\right)$$

y en forma de serie

$$\begin{aligned}
\frac{az}{(z-1)(z^2-5z+6)} &= \frac{a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - a2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} + \frac{3a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} \qquad |z|>3 \\
&= a\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-2^n+\frac{1}{2}3^n\right)\frac{1}{z^n} \qquad |z|>3
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = a\left(\frac{1}{2}-2^n+\frac{1}{2}3^n\right) \qquad n\geq 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

Podemos comprobar que para $n=1$, se obtienen los valores de las condiciones iniciales

$$y_1 = a\left(\frac{1}{2}-2^1+\frac{1}{2}3^1\right) = a\left(\frac{1}{2}-2+\frac{3}{2}\right) = 0$$

También es válido para $n=0$

$$y_0 = a\left(\frac{1}{2}-2^0+\frac{1}{2}3^0\right) = a\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right) = 0$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.