Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 5 de febrero de 2010

1. Expresa el número complejo $z = \frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5}$ en forma polar o exponencial.
   Solución:
$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{1}{5} - i\frac{\sqrt{3}}{5}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{3}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$
$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{-\sqrt{3}/5}{1/5} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 4^o \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

2. Calcula el inverso de $z = 5 - i$ y expresa el resultado en forma binómica.
   Solución: Aplicamos la definición de inverso
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{5+i}{|5-i|^2} = \frac{5+i}{5^2+1^2} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i$$

3. Calcula el módulo de $z = \dfrac{(2-5i)(2+i)}{(1-2i)}$.
   Solución: Utilizando las propiedades de los módulos
$$|z| = \left|\frac{(2-5i)(2+i)}{(1-2i)}\right| = \frac{|(2-5i)|\,|(2+i)|}{|1-2i|} = \frac{\left(\sqrt{(2)^2+(-5)^2}\right)\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)}{\left(\sqrt{1^2+(-2)^2}\right)} = \frac{\sqrt{29}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{29}$$

4. Calcula $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ expresando el resultado en forma binómica.
   Solución: Ponemos en forma polar o exponencial
$$\text{Módulo: } |z| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 1^o \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3}$$
   y por tanto $z = 2e^{i\pi/3}$. Si ahora elevamos a 4
$$z^4 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 = 2^4 e^{i4\pi/3}$$
   por otra parte
$$\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$
   luego
$$2^4 e^{i4\pi/3} = 2^4 e^{i\pi} e^{i\pi/3} = -16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = -16\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i8\sqrt{3}$$

5. Calcula $z = \sqrt[4]{-4}$ y escribe los resultados en forma binómica.

Solución: Escribimos el número 4 en forma polar

$$\text{Módulo:}\, |z| = \quad |-4| = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Argumento: Como } z \text{ es un número real negativo } \theta = \pi$$

Las raíces cuartas de z son

$$w_k = \sqrt[4]{|z|}e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

por tanto, teniendo en cuenta que $|z| = 4$ y por tanto $|w_k| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}e^{i\varphi_0} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1+i) \\
w_1 &= \sqrt{2}e^{i\varphi_1} = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-1+i) \\
w_2 &= \sqrt{2}e^{i\varphi_2} = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-1-i) \\
w_3 &= \sqrt{2}e^{i\varphi_3} = \sqrt{2}e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1-i)
\end{aligned}$$

6. Calcula $z = \dfrac{2+i}{3+2i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Para dividir ambos complejos, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{2+i}{3+2i} = \frac{(2+i)}{(3+2i)}\frac{(3-2i)}{(3-2i)} = \frac{(2+i)(3-2i)}{|3+2i|^2} = \frac{6-4i+3i+2}{9+4} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$$

7. Calcula $(1-i)(3+i)$ y expresa resultado en forma binómica.

Solución: Operamos normalmente

$$(1-i)(3+i) = 3 + i - 3i - (i)^2 = 4 - 2i$$

8. Calcula $z = \dfrac{\left(i^{43} - i^{40}\right)}{\left(i^{110} - i^{413}\right)}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de i.

$$\begin{aligned}
43 &= 4 \cdot 10 + 3 \Rightarrow i^{43} = i^3 = -i \\
40 &= 4 \cdot 10 + 0 \Rightarrow i^{40} = i^0 = 1 \\
110 &= 4 \cdot 27 + 2 \Rightarrow i^{110} = i^2 = -1 \\
413 &= 4 \cdot 103 + 1 \Rightarrow i^{413} = i^1 = i
\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\left(i^{43} - i^{40}\right)}{\left(i^{110} - i^{413}\right)} = \frac{-i-1}{-1-i} = \frac{-1-i}{-1-i} = 1$$

9. Calcula y expresa $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)(1+i)$ en forma polar o exponencial.

Solución: Como el resultado se pide en forma exponencial, lo mejor es utilizar esta forma para cada uno de los complejos. Para $z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)$

$$\text{Módulo: } |z_1| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta_{z_1} = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z_1 \text{ está en el } 4^{er} \text{ cuadrante, } \theta_{z_1} = -\frac{\pi}{3}$$

Para $z_2 = (1+i)$

$$\text{Módulo: } |z_2| = |1+i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Argumento: } \theta_{z_2} = \arctan\frac{1}{1} = \arctan 1, \text{ como } z_2 \text{ está en el } 1^{er} \text{ cuadrante, } \theta_{z_2} = \frac{\pi}{4}$$

Finalmente realizamos el producto en forma exponencial

$$z_1 z_2 = \left(2e^{-i\pi/3}\right)\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/3+i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$$

10. Calcula y expresa $z = \dfrac{(1-i)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}$ en forma polar o exponencial.

Solución: Como el resultado se pide en forma exponencial, de nuevo, la mejor estrategia es utilizar esta forma para cada uno de los complejos.

Notar que $(1-i)$ es el conjugado de $1+i$, cuya representación exponencial ha sido calculada en el ejercicio anterior

$$z_1 = (1-i) = \overline{(1+i)} = \overline{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

El complejo del denominador $\left(1+\sqrt{3}i\right)$ es el complejo conjugado de $\left(1 - i\sqrt{3}\right)$, cuya representación exponencial también ha sido calculada en el ejercicio anterior, por tanto

$$z_2 = \left(1+\sqrt{3}i\right) = \overline{\left(1-\sqrt{3}i\right)} = \overline{\left(2e^{-i\pi/3}\right)} = \left(2e^{i\pi/3}\right)$$

lo único que queda por hacer es el cociente de complejos en forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{\left(2e^{i\pi/3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4-(i\pi/3)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i7\pi/12}$$

<u>Nota</u>: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 5 de febrero de 2010

OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

1.- Responde razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.

2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.

3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.

4.- Utiliza resultados exactos, sin decimales, recuerda que **no está permitido** el uso de calculadora.

---

1. **(0.5 ptos.)** Expresa $\cos 3x$ y $\operatorname{sen} 3x$ en términos de $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$.

Solución: *(Ejercicio resuelto en clase)* Utilizaremos la conocida fórmula de Moivre

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

para el caso $n = 3$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$$

Desarrollando el cubo de la suma

$$\begin{aligned}
(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 &= \cos^3 x + 3(\cos x)^2 (i \operatorname{sen} x) + 3(\cos x)(i \operatorname{sen} x)^2 + (i \operatorname{sen} x)^3 \\
&= \cos^3 x + i3\cos^2 x \operatorname{sen} x - 3\cos x \overset{2}{\operatorname{sen}} x - i \overset{3}{\operatorname{sen}} x \\
&= \left(\cos^3 x - 3\cos x \overset{2}{\operatorname{sen}} x\right) + i\left(3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \overset{3}{\operatorname{sen}} x\right)
\end{aligned}$$

por tanto igualando partes real e imaginaria obtenemos la relación pedida

$$\begin{aligned}
\left(\cos^3 x - 3\cos x \overset{2}{\operatorname{sen}} x\right) &= \cos 3x \\
\left(3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \overset{3}{\operatorname{sen}} x\right) &= \operatorname{sen} 3x
\end{aligned}$$

2. **(1 pto.)** Encuentra todas las soluciones de la ecuación

$$\tan z = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i}$$

Solución: *(Ejercicio similar a los resueltos en clase, por ejemplo* $\cos z = 4$*)* Expresamos la tangente en términos de la función exponencial compleja

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i} \Rightarrow \frac{\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i} \Rightarrow \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i}$$

hacemos el cambio $e^{iz} = w \Rightarrow e^{-iz} = \frac{1}{w}$

$$\frac{1}{i} \frac{w - \dfrac{1}{w}}{w + \dfrac{1}{w}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i} \Rightarrow \frac{1}{i} \frac{w^2 - 1}{w^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i}$$

la igualdad entre las dos fracciones conduce a la siguiente ecuación

$$\left(w^2-1\right)\left(\sqrt{3}-2i\right)=i\left(w^2+1\right)\Rightarrow w^2\left(\sqrt{3}-2i-i\right)=\left(\sqrt{3}-2i+i\right)\Rightarrow w^2\left(\sqrt{3}-3i\right)=\left(\sqrt{3}-i\right)$$

y despejando w^2

$$w^2=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}\right)=\frac{3+i3\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{12}=\frac{6+i2\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

aunque ahora podríamos calcular la raíz cuadrada para obtener el valor de w, es más eficiente tener en cuenta que si $w=e^{iz}$, entonces $w^2=e^{i2z}$ y por tanto

$$e^{i2z}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

y tomando logaritmos complejos

$$i2z=\log\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Para calcular el logaritmo complejo necesitamos el módulo y argumento de $\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right| &= \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \arg(z) &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Y finalmente obtendremos

$$i2z=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}+i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=-\frac{1}{2}\ln 3+i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$$

o despejando z

$$z=\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{2}\ln 3+i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right)=i\frac{1}{4}\ln 3+\frac{\pi}{12}+k\pi=\pi\left(k+\frac{1}{12}\right)+i\frac{\ln 3}{4}$$

3. **(1 pto.)** Encuentra los números complejos $z=x+iy$ en los que la función

$$f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)+z^2\,\mathrm{Im}(z)$$

es derivable y calcula la derivada en dichos puntos.

Solución: *(Ejercicio similar a los resueltos en clase, por ejemplo $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)$)* Para comprobar la derivabilidad de $f(z)$ utilizaremos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto, en primer lugar tenemos que expresar $f(z)$ en la forma $f=u+iv$. Teniendo en cuenta que $z=x+iy$, y por tanto $\mathrm{Re}(z)=x$ e $\mathrm{Im}(z)=y$:

$$z\,\mathrm{Re}(z)+z^2\,\mathrm{Im}(z)=(x+iy)\,x+(x+iy)^2\,y=x^2+iyx+\left(x^2-y^2+i2xy\right)y=x^2+iyx+x^2y-y^3+i2xy^2$$

agrupando partes real e imaginaria

$$f=u+iv=\left(x^2+x^2y-y^3\right)+i\left(xy+2xy^2\right)$$

Como se ha comentado antes, para que f sea derivable, las funciones u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned}u_x &= v_y\Rightarrow(2x+2xy)=(x+4xy)\Rightarrow x-2xy=0\\ u_y &= -v_x\Rightarrow\left(x^2-3y^2\right)=-\left(y+2y^2\right)\Rightarrow x^2-y^2+y=0\end{aligned}$$

De la primera ecuación

$$x(1-2y)=0$$

que tiene por soluciones

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ & & \text{o} \\ y & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Sustituyendo el valor $x=0$ en la segunda ecuación

$$x=0 \Rightarrow -y^2+y=0 \Rightarrow y(-y+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \\ y=1 \end{cases}$$

y se obtienen dos puntos: $P_1=(0,0)$ y $P_2=(0,1)$ que conducen a los complejos $z_1=0$ y $z_2=i$.
Sustituyendo el valor $y=\frac{1}{2}$ en la segunda ecuación

$$x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{4}=0$$

que no tiene solución puesto que x debe ser un número real.

En resumen, sólo tenemos dos complejos para los que la función es derivable. Podemos calcular la derivada en esos puntos utilizando la definición correspondiente

$$f'(x_0+iy_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)=(2x_0+2x_0y_0)+i\left(y_0+2y_0^2\right)$$

y lo único que necesitamos es sustituir los complejos adecuadamente

$$\begin{array}{rcl} f'(0) & = & f'(0+i0)=u_x(0,0)+iv_x(0,0)=0+i0=0 \\ \\ f'(i) & = & f'(0+i1)=u_x(0,1)+iv_x(0,1)=0+i3=3i \end{array}$$

4. **((1.5 ptos.)** Calcula el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{3z^2-2}{(z^2-2z+2)(z+2)}$$

en el anillo $A\left(0,\sqrt{2},2\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:\sqrt{2}<|z|<2\right\}$ (desarrollo centrado en $z_0=0$).

1. **Solución:** Buscamos el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en potencias de $(z-z_0)=z$ dentro del anillo A. Como siempre, en primer lugar hacemos la descomposición de $f(z)$ en fracciones simples, buscando en primer lugar la descomposición en raíces del denominador. Sólo nos queda por factorizar el polinomio de segundo grado

$$z^2-2z+2=0 \Leftrightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

de esta forma

$$\frac{3z^2-2}{(z^2-2z+2)(z+2)}=\frac{3z^2-2}{(z-(1+i))(z-(1-i))(z+2)}=\frac{A}{z-(1+i)}+\frac{B}{z-(1-i)}+\frac{C}{z+2}$$

Al final del ejercicio obtendremos los valores de estos parámetros, sin embargo lo interesante ahora es expresar cada fracción simple en la correspondiente serie de potencias. Lo haremos de forma individual, utilizando como siempre la suma de una progresión geométrica con razón menor que la unidad

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ siempre que } |z|<1$$

(a) Fracción $\frac{1}{z-(1+i)}$: Como $\sqrt{2}<|z|<2$, entonces $\frac{\sqrt{2}}{|z|}<1$ y por tanto $\frac{|1+i|}{|z|}=\frac{\sqrt{2}}{|z|}<1$ y el desarrollo buscado es

$$\frac{1}{z-(1+i)}=\frac{1}{z\left(1-\frac{1+i}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1+i}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n-1}}{z^n}$$

(b) Fracción $\frac{1}{z-(1-i)}$: Como $\sqrt{2}<|z|<2$, entonces $\frac{\sqrt{2}}{|z|}<1$ y por tanto $\frac{|1-i|}{|z|}=\frac{\sqrt{2}}{|z|}<1$ y el desarrollo buscado es

$$\frac{1}{z-(1-i)}=\frac{1}{z\left(1-\frac{1-i}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1-i}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^{n-1}}{z^n}$$

(c) Fracción $\frac{1}{z+2}$: Como $|z|<2$, entonces $\frac{|z|}{2}<1$ y y la razón debe ser $\frac{z}{2}$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

El desarrollo para $f(z)$ buscado es

$$\begin{aligned}\frac{3z^2-2}{(z-(1+i))(z-(1-i))(z+2)} &= \frac{A}{z-(1+i)}+\frac{B}{z-(1-i)}+\frac{C}{z+2}\\ &= A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n-1}}{z^n}+B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^{n-1}}{z^n}+C\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A(1+i)^{n-1}+B(1-i)^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}+C\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Lo único que queda por hacer es calcular los valores de A, B y C; para ello utilizamos la descomposición correspondiente

$$\frac{3z^2-2}{(z-(1+i))(z-(1-i))(z+2)}=\frac{A}{z-(1+i)}+\frac{B}{z-(1-i)}+\frac{C}{z+2}$$

sumando las fracciones e igualando numeradores

$$A(z-(1-i))(z+2)+B(z-(1+i))(z+2)+C(z-(1+i))(z-(1-i))=3z^2-2$$

Dando a z los valores de las raíces $1+i, 1-i$ y -2

$$\begin{aligned}z &= 1+i\Rightarrow A((1+i)-(1-i))((1+i)+2)=3(1+i)^2-2\Leftrightarrow A(6i-2)=6i-2\Leftrightarrow A=1\\ z &= 1-i\Rightarrow B((1-i)-(1+i))((1-i)+2)=3(1-i)^2-2\Leftrightarrow B(-i6-2)=-6i-2\Leftrightarrow B=1\\ z &= -2\Rightarrow C(-2-(1+i))(-2-(1-i))=3(-2)^2-2\Leftrightarrow C10=10\Leftrightarrow C=1\end{aligned}$$

y la serie buscada es

$$\frac{3z^2-2}{(z-(1+i))(z-(1-i))(z+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left((1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

2. Calcula las siguientes integrales sobre las curvas que se indican :

(a) **(1 pto.)** $\displaystyle\int_{\gamma_0} z^2dz$ siendo $\gamma_0(t)$ el segmento que une $z_1=-1-i$ con $z_2=1+i$.

(b) **(1 pto.)** $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}dz$, donde $\gamma_1(t) = 4e^{it}$; $\quad t \in [0, 2\pi]$

Solución: Resolvemos cada apartado de forma independiente y utilizando un método diferente en cada caso.

(a) Aunque la curva no es cerrada, ya que se trata de un segemento lineal que une dos complejos, la función es derivable compleja, de hecho es una función entera y por tanto tiene primitiva que es

$$F(z) = \frac{z^3}{3}$$

Para calcular la integral sólo es necesario aplicar la regla de barrow

$$\int_{\gamma_0} z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_{z=-1-i}^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} - \frac{(-1-i)^3}{3} = \frac{4(i-1)}{3}$$

Es posible utilizar la definición de integral a lo largo de una curva, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$, pero es un camino más largo.

(b) La curva es una circunferencia de centro 0 y radio 4, por tanto es una curva cerrada, además la función es racional por lo que sólo tiene singularidades aisladas y podemos aplicar el teorema de los residuos para el cálculo de la integral. Las singularidades son los complejos que anulan el denominador

$$z^2 + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\pi^2 \Leftrightarrow z = \pm\pi i$$

por tanto

$$\frac{e^z}{z^2+\pi^2} = \frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)}$$

Ambas singularidades están dentro de la circunferencia, puesto que

$$d(0, \pi i) = d(0, -\pi i) = \pi = 3.141592654..... < 4$$

por tanto las dos contribuyen al cálculo de la integral.

Teniendo en cuenta que son polos simples sus residuos son muy sencillos de calcular:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)}, \pi i\right) = \lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)\frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)} = \lim_{z\to\pi i}\frac{e^z}{(z+\pi i)} = \frac{e^{\pi i}}{2\pi i} = -\frac{1}{2\pi i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)}, -\pi i\right) = \lim_{z\to-\pi i}(z+\pi i)\frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)} = \lim_{z\to-\pi i}\frac{e^z}{(z-\pi i)} = \frac{e^{-\pi i}}{-2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}$$

y el valor de la integral

$$\int_{\gamma_1}\frac{e^z}{z^2+\pi^2}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)}, \pi i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)}, -\pi i\right)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi i} + \frac{1}{2\pi i}\right) = 0$$

3. Calcula en función de $r > 0$, cada una de las siguientes integrales; indicando, cuando proceda, las singularidades y su tipo.

(a) **(1.25 ptos.)** $\displaystyle\int_{\gamma_2}\left((z-1)^2 e^{1/(z-1)} + \frac{1}{z^4}\operatorname{sen}(z)\right)dz$, donde $\gamma_2(t) = i + re^{it}$; $\quad t \in [0, 2\pi]$

(b) **(1.25 ptos.)** $\int_{\gamma_3}\dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}dz$, donde $\gamma_3(t) = \gamma_4(t) \sqcup \gamma_5(t)$ es la semicircunferencia definida mediante $\gamma_4(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma_5(t) = t$, $t \in [-r, r]$ (ver Figura 1).

Solución: Resolvemos cada integral de forma independiente:

(a) Utilizando la linealidad la integral se puede poner como

$$\int_\gamma \left((z-1)^2 e^{1/(z-1)} + \frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z) \right) dz = \int_\gamma (z-1)^2 e^{1/(z-1)} dz + \int_\gamma \frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z)\, dz$$

La función $(z-1)^2 e^{1/z-1}$ tiene una única singularidad, $z_1 = 1$, que es aislada y además por estar dentro del argumento de una función exponencial es esencial.
La función $\frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z)$ también tiene una única singularidad $z_2 = 0$. En este caso como es un cero de orden 4 del denominador y un 0 de orden 1 del numerador, será un polo de orden 3.
En ambos casos vamos a utilizar el desarrollo de Laurent correspondiente para encontrar el valor del residuo. En el primer caso porque no hay otra alternativa ya que es una singularidad esencial, mientras que en el segundo caso, aunque es un polo de orden 3 y podemos emplear los métodos usuales, por simplicidad utilizaremos también el desarrollo de Laurent alrededor de su correspondiente singularidad.
Estos desarrollos son muy sencillos utilizando el desarrollo en series de potencias de las funciones e^z y $\operatorname{sen}(z)$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow (z-1)^2 e^{1/(z-1)} = (z-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^{n-2}}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z) = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-3}$$

Para econtrar el residuo buscaremos en cada serie el coeficiente que acompaña a la potencia $(z-z_0)^{-1} = \frac{1}{z-z_0}$. Para el caso de $(z-1)^2 e^{1/z-1}$ y la singularidad $z_1 = 1$ obtenemos

$$n - 2 = 1 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

por tanto

$$\operatorname{Res}\left((z-1)^2 e^{1/z-1}, 1 \right) = \frac{1}{6}$$

Para el caso $\frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z)$ y $z_2 = 0$

$$2n - 3 = -1 \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1$$

por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z), 0 \right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver cuando cada singularidad está dentro de la curva, como esta curva depende del radio r, tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0 = i$ a la singularidades

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |1 - i| = \sqrt{2} \\ z_2 &= 0 \Rightarrow |z_2 - z_0| = |0 - i| = 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$0 < r < 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 \notin \mathring{\gamma} \\ z_2 \notin \mathring{\gamma} \end{array} \right. \Rightarrow \int_\gamma (z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int_\gamma \frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z)\, dz = 0 + 0 = 0$$

$$1 < r < \sqrt{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 \notin \mathring{\gamma} \\ z_2 \in \mathring{\gamma} \end{array} \right. \Rightarrow \int_\gamma (z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int_\gamma \frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z)\, dz = 0 + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z), 0 \right) = \frac{2\pi i}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

$$r > \sqrt{2} \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathring{\gamma} \Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left((z-1)^2 e^{1/z-1}, 1 \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4} \operatorname{sen}(z), 0 \right) \right\} = 2\pi \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right\} = \frac{2\pi i}{3}$$

(b) Se trata de la integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada (semicircunferencia de centro 0 y radio r conectada con un segmento). Como las funciones racionales sólo tienen singularidades aisladas, el método que tenemos que emplear es el teorema de los residuos. En primer lugar buscamos las singularidades de la función, que serán los ceros del denominador y que podemos calcular fácilmente

$$\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)^2=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z^2+9=0 & \Leftrightarrow z=\pm 3i \\ \\ \left(z^2+4\right)^2=0 & \Leftrightarrow z=\pm 2i \end{array}\right.$$

Luego la función del integrando se puede expressar como

$$\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+4\right)^2} \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z+3i)(z-3i)(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

de donde se deduce que $3i$ y $-3i$ son polos simples, mientras que $2i$ y $-2i$ son polos dobles.
Notemos que la curva es una semicircunferencia situada en el semiplano superior y por tanto ni $-3i$, ni $-2i$ caerán nunca dentro de la curva. Sólo es necesario por tanto conocer los residuos de $f(z)$ en las otras dos singularidades: $2i$ y $3i$.
A continuación calcularemos los residuos. Para el polo simple:

$$\operatorname{Res}(f(z), 3i)=\lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{z^2}{(z+3i)(z+2i)^2(z-2i)^2}=\frac{(3i)^2}{(3i+3i)(3i+2i)^2(3i-2i)^2}=\frac{3i}{50}$$

Mientras que para el polo doble

$$\operatorname{Res}(f(z), 2i)=\operatorname{Res}\left(\frac{\frac{z^2}{(z-3i)(z+3i)(z+2i)^2}}{(z-2i)^2}, 2i\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{\phi(z)}{(z-2i)^2}, 2i\right)=\frac{\phi'(2i)}{1!}$$

Calculamos $\phi'(z)$

$$\phi(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)(z+2i)^2} \Rightarrow \phi'(z)=\frac{2z\left(z^2+9\right)(z+2i)^2-\left(2z(z+2i)^2+2\left(z^2+9\right)(z+2i)z^2\right)}{\left(z^2+9\right)^2(z+2i)^4}$$

y evaluando en $2i$

$$\phi'(2i)=\frac{4i\left((2i)^2+9\right)(4i)^2-\left(4i(4i)^2+2\left((2i)^2+9\right)(4i)(2i)^2\right)}{\left((2i)^2+9\right)^2(4i)^4}=-\frac{3}{200}i$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver qué singularidades están dentro de la curva; como esta curva depende del radio r, tendremos que distinguir cada uno de los casos. Para ello calculamos las distancias del centro $z_0=0$, a cada una de las singularidades

$$\begin{aligned} z_1 &= 2i \Rightarrow |z_1-z_0|=|2i-0|=2 \\ \\ z_2 &= 3i \Rightarrow |z_2-z_0|=|3i-0|=3 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 0 < r < 2 \Rightarrow z_1, z_2 \notin \overset{\circ}{\gamma_3} \Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2} dz = 0 \\ \\ 2 < r < 3 \Rightarrow \begin{cases} z_1 \in \overset{\circ}{\gamma_3} \\ \\ z_2 \notin \overset{\circ}{\gamma_3} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2} dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(f, 2i\right)\right) = 2\pi i \left(\tfrac{3i}{50}\right) = -\tfrac{3}{25}\pi \\ \\ r > 3 \Rightarrow \left\{ \; z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\gamma_3} \right. \displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2} dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(f, 2i\right) + \mathrm{Res}\left(f, 3i\right)\right) = 2\pi i \left(\tfrac{3i}{50} - \tfrac{3i}{200}\right) = \tfrac{-9}{100}\pi \end{cases}$$

4. Elige sólo una de las siguientes opciones:

OPCIÓN A.- (1.5 ptos.) Se considera la curva $\gamma(t) = 3e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$.

(a) Calcula

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{z^3(z^2+2z+2)} dz$$

(b) Deduce que $\lim_{a\to 0} I(a) = 0$.

OPCIÓN B.- (1.5 ptos.) Utiliza la transformada $\mathcal{Z}$ para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+3} + y_{n+2} - 4y_{n+1} - 4y_n = 1$$

con condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$.

Solución:

OPCIÓN A.

(a) La función

$$\frac{e^{az}}{z^3(z^2+2z+2)}$$

es un conciente de funciones derivables, por tanto, la función tendrá singularidades en aquellos puntos que anulen el denominador, es decir

$$z^3\left(z^2+2z+2\right) = 0$$

Esta ecuación tiene por soluciones

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ z^2+2z+2 &= 0 \Rightarrow z = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{-2\pm 2i}{2} = -1\pm i \end{aligned}$$

y tendremos 3 singularidades

$$\begin{array}{cc} z_1 = 0 & \text{Polo de orden 3} \\ z_2 = -1+i & \text{Polo simple} \\ z_3 = -1-i & \text{Polo simple} \end{array}$$

Según el teorema de los residuos, al ser la integral de una función que sólo tiene singularidades aisladas sobre una curva cerrada, el valor de la integral será la suma de los residuos de las singularidades que caen dentro de la curva, multiplicada por $2\pi i$. Como la curva es una circcunferencia de centro 0 y radio

3, para saber si una singularidad cae dentro de la curva tendremos que ver que su distancia al centro es menor que el radio

$$\begin{aligned} d(0,z_1) &= |z_1-0| = |z_1| = |0| = 0 < 3 \Rightarrow z_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \\ d(0,z_2) &= |z_2-0| = |z_2| = |-1+i| = \sqrt{2} < 3 \Rightarrow z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \\ d(0,z_3) &= |z_3-0| = |z_3| = |-1-i| = \sqrt{2} < 3 \Rightarrow z_3 \in \overset{\circ}{\gamma} \end{aligned}$$

todas las singularidades están dentro de la curva, por tanto

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{z^3(z^2+2z+2)}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,-1+i) + \operatorname{Res}(f,-1-i)\right]$$

Calcularemos a continuación esos residuos. Para los polos simples

$$\begin{aligned} z_2 &= -1+i \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{e^{az}}{z^3(z^2+2z+2)}, -1+i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{e^{az}}{z^3(z-(-1-i))}}{(z-(-1+i))}, -1+i\right) \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi_1}{(z-(-1+i))}, -1+i\right) = \varphi_1(-1+i) = \frac{e^{a(-1+i)}}{(-1+i)^3(-1+i-(-1-i))} = \frac{e^{a(-1+i)}}{4i(1+i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= -1-i \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{e^{az}}{z^3(z^2+2z+2)}, -1-i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{e^{az}}{z^3(z-(-1+i))}}{(z-(-1-i))}, -1-i\right) \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi_2}{(z-(-1-i))}, -1-i\right) = \varphi_2(-1-i) = \frac{e^{a(-1-i)}}{(-1-i)^3(-1-i-(-1+i))} = \frac{e^{a(-1-i)}}{-4i(1-i)} \end{aligned}$$

Como vemos ambos residuos son conjugados uno del otro y los dos contribuyen a la integral tendremos

$$\operatorname{Res}(f,-1+i) + \operatorname{Res}(f,-1-i) = \frac{e^{a(-1+i)}}{4i(1+i)} + \frac{e^{a(-1-i)}}{-4i(1-i)} = \frac{e^{a(-1+i)}}{4i(1+i)} + \overline{\frac{e^{a(-1+i)}}{4i(1+i)}} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{a(-1+i)}}{4i(1+i)}\right)$$

o poniendo en forma binómica el complejo

$$\frac{e^{a(-1+i)}}{4i(1+i)} = \frac{-i(1-i)}{4(1+i)(1-i)}e^{-a}(\cos a + i \operatorname{sen} a) = -\frac{e^{-a}}{8}(1+i)(\cos a + i\operatorname{sen} a)$$

se obtiene

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{a(-1+i)}}{4i(1+i)}\right) = 2\frac{e^{-a}}{8}(\operatorname{sen} a - \cos a) = \frac{e^{-a}}{4}(\operatorname{sen} a - \cos a)$$

Mientras que para el polo triple

$$z_3 = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{e^{az}}{z^3(z^2+2z+2)}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{e^{az}}{z^2+2z+2}}{z^3}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi_3}{z^3}, 0\right) = \frac{\varphi_3''(0)}{2!}$$

Derivaremos φ_3 dos veces

$$\varphi_3(z) = \frac{e^{az}}{z^2+2z+2} \Rightarrow \varphi_3'(z) = \frac{ae^{az}\left(z^2+2z+2\right) - (2z+2)e^{az}}{\left(z^2+2z+2\right)^2}$$

$$\varphi_3''(z) = \frac{\left(a^2e^{az}\left(z^2+2z+2\right) - 2e^{az}\right)\left(z^2+2z+2\right) - 2(2z+2)\left(ae^{az}\left(z^2+2z+2\right) - (2z+2)e^{az}\right)}{\left(z^2+2z+2\right)^3}$$

y evaluamos en $z=0$

$$\varphi_3''(0) = \frac{\left(2a^2-2\right)2 - 4(2a-2)}{2^3} = \frac{4\left(a^2-1\right) - 8(a-1)}{2^3} = \frac{4(a-1)(a+1-2)}{2^3} = \frac{(a-1)^2}{2}$$

por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{az}}{z^3\left(z^2+2z+2\right)},0\right)=\frac{\left(a-1\right)^2}{4}$$

La integral será, teniendo en cuenta que la suma de los dos últimos residuos ya la hemos calculado previamente

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^{az}}{z^3\left(z^2+2z+2\right)}dz &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f,0\right)+\operatorname{Res}\left(f,-1+i\right)+\operatorname{Res}\left(f,-1-i\right)\right]\\ &= 2\pi i\left[\frac{\left(a-1\right)^2}{4}+\frac{e^{-a}}{4}\left(\operatorname{sen} a-\cos a\right)\right]\end{aligned}$$

(b) Simplemente tomamos límites cuando $a\to 0$

$$\lim_{a\to 0} I\left(a\right)=\lim_{a\to 0}2\pi i\left[\frac{\left(a-1\right)^2}{4}+\frac{e^{-a}}{4}\left(\operatorname{sen} a-\cos a\right)\right]=0$$

OPCIÓN B: Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+3}+y_{n+2}-4y_{n+1}-4y_n=1$$

junto con las condiciones iniciales $y_0=0$, $y_1=0$ e $y_2=1$, aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+3}+y_{n+2}-4y_{n+1}-4y_n\right]\left(z\right)=\mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+3}\right]\left(z\right)+\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right]\left(z\right)-4\mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right]\left(z\right)-4\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)=\mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[y_{n+3}\right]\left(z\right) &= z^3\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-z^3y_0-z^2y_1-zy_2=z^3\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-z\\ \mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right]\left(z\right) &= z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-z^2y_0-zy_1=z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)\\ \mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right]\left(z\right) &= z\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-zy_0=z\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)\\ \mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right) &= \mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}\left(z^3\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-z\right)+\left(z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)\right)-4z\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-4\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right) &= \mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)\\ \left(z^3+z^2-4z-4\right)\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right)-z &= \mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)\\ \left(z^3+z^2-4z-4\right)\mathcal{Z}\left(y_n\right)\mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(z\right) &= \mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)+z\end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)\left[z\right]=\frac{\mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)+z}{\left(z^3+z^2-4z-4\right)}$$

El valor de $\mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)$ lo obtenemos mediante la aplicación directa la definición de transformada $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[1\right]\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\frac{z}{z-1}$$

y por fin

$$\mathcal{Z}\left(y_n\right)\left[z\right]=\frac{\frac{z}{z-1}+z}{\left(z^3+z^2-4z-4\right)}=\frac{z^2}{\left(z-1\right)\left(z^3+z^2-4z-4\right)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n = Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z-1)(z^3+z^2-4z-4)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Las raíces se obtienen fácilmente mediante Ruffini

$$z^3+z^2-4z-4 = (z+1)(z-2)(z+2)$$

y la descomposición en fracciones simples será

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-2)(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-2} + \frac{D}{z+2}$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0,r,\infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad |z|>1\\
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \quad |z|>1\\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z|>2\\
\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n} \quad |z|>2
\end{aligned}$$

Finalmente lo único que queda por hacer es calcular los valores de A, B, C y D

$$\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-2)(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-2} + \frac{D}{z+2}$$

y sumando las fracciones e igualando numeradores

$$A(z+1)(z-2)(z+2)+B(z-1)(z-2)(z+2)+C(z-1)(z+1)(z+2)+D(z-1)(z+1)(z-2) = z^2$$

Y dando a z los valores de las raíces $1, -1, 2$ y -2

$$\begin{aligned}
z &= 1 \Rightarrow A(1+1)(1-2)(1+2) = 1 \Leftrightarrow -6A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{6}\\
z &= -1 \Rightarrow B(-1-1)(-1-2)(-1+2) = 1 \Leftrightarrow 6B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{6}\\
z &= 2 \Rightarrow C(2-1)(2+1)(2+2) = 4 \Leftrightarrow 12C = 4 \Leftrightarrow C = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\\
z &= -2 \Rightarrow D(-2-1)(-2+1)(-2-2) = 4 \Leftrightarrow -12D = 4 \Leftrightarrow D = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-2)(z+2)} = \frac{-1}{6(z-1)} + \frac{1}{6(z+1)} + \frac{1}{3(z-2)} - \frac{1}{3(z+2)}$$

y en forma de serie

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-2)(z+2)} &= -\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n} \quad |z|>2\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{n-1} + \frac{1}{3}2^{n-1} - \frac{1}{3}(-1)^{n-1}2^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} \quad |z|>2
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos

$$y_n = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{n-1} + \frac{1}{3}2^{n-1} - \frac{1}{3}(-1)^{n-1}2^{n-1} \quad n > 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

Podemos comprobar que para $n = 1$ y $n = 2$, se obtienen los valores de las condiciones iniciales

$$y_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{1-1} + \frac{1}{3}2^{1-1} - \frac{1}{3}(-1)^{1-1}2^{1-1} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$y_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{2-1} + \frac{1}{3}2^{2-1} - \frac{1}{3}(-1)^{2-1}2^{2-1} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Con las oportunas simplificaciones es posible expresar la solución como

$$y_n = \frac{1}{6}(2^n - 1)(1 + (-1)^n)$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.