Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad)

Examen de operaciones básicas, 5 de febrero de 2009

1. Expresa el número complejo $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{5}$ en forma polar o exponencial.

   Solución:

$$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 41^o \text{ cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

2. Calcula el inverso de $z = 1 + 5i$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Aplicamos la definición de inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1-5i}{|1+5i|^2} = \frac{1-5i}{1^2+5^2} = \frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$$

3. Calcula el módulo de $z = \dfrac{(1+5i)}{(1+i)^2}$.

   Solución: Utilizando las propiedades de los módulos

$$|z| = \left|\frac{(1+5i)}{(1+i)^2}\right| = \frac{|(1+5i)|}{|1+i|^2} = \frac{\left(\sqrt{1^2+5^2}\right)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

4. Calcula $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Ponemos en forma polar o exponencial

$$\text{Módulo: } |z| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el primer cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

   y por tanto $z = 2e^{i\pi/3}$. Si ahora elevamos a 4

$$z^4 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 = 2^4 e^{i4\pi/3} = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i8\sqrt{3}$$

5. Calcula $z=\sqrt[4]{-i}$ y escribe los resultados en forma exponencial.

Solución: Utilizamos la definición de raíz cuarta utilizando la forma polar o exponencial del radicando $w=-i$:

$$\text{Módulo:} \, |w| = \ |-i| = \sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

Argumento: $\theta_w = \arctan\dfrac{-1}{0} = \arctan -\infty$, como w está en el eje imaginario negativo, $\theta_w = \dfrac{3\pi}{2}$

Las raíces cuartas de w son

$$w_k = \sqrt[4]{|w|}e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{4} = \frac{3\pi/2+2k\pi}{4} \text{ con } k=0,1,2,3$$

por tanto, teniendo en cuenta que $|w|=1$

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\varphi_0} = e^{i3\pi/8} \\ w_1 &= e^{i\varphi_1} = e^{i7\pi/8} \\ w_2 &= e^{i\varphi_2} = e^{i11\pi/8} \\ w_3 &= e^{i\varphi_3} = e^{i15\pi/8} \end{aligned}$$

6. Calcula $z=\dfrac{i-1}{3+8i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{i-1}{3+8i}\frac{(3-8i)}{(3-8i)} = \frac{(-1+i)(3-8i)}{|3-8i|^2} = \frac{-1+8i+3i+8}{9+64} = \frac{5}{73}+\frac{11}{73}i$$

7. Expresa el complejo $z=2e^{-i31\pi/3}$ en forma binómica.

Solución: Primero buscaremos la equivalencia entre el ángulo $31\pi/3$ y un ángulo en $[0,2\pi]$

$$\frac{31\pi}{3} = \frac{30\pi}{3}+\frac{\pi}{3} = 10\pi + \frac{\pi}{3} = 5(2\pi)+\frac{\pi}{3} \sim \frac{\pi}{3}$$

luego el complejo z, puede ponerse como

$$z = 2e^{-i31\pi/3} = 2e^{-i\pi/3}$$

y en forma binómica

$$2e^{-i\pi/3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3}$$

8. Calcula $z=\dfrac{(i^{32}-i^{29})}{(i^{107}-i^{410})}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: En primer lugar reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de i.

$$\begin{aligned} 32 &= 4\cdot 8+0 \Rightarrow i^{32}=i^{0}=1 \\ 29 &= 4\cdot 7+1 \Rightarrow i^{29}=i^{1}=i \\ 107 &= 4\cdot 26+3 \Rightarrow i^{107}=i^{3}=-i \\ 410 &= 4\cdot 102+2 \Rightarrow i^{410}=i^{2}=-1 \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{(i^{32}-i^{29})}{(i^{107}-i^{410})}=\frac{1-i}{-i-(-1)}=\frac{1-i}{-i+1}=\frac{1-i}{1-i}=1$$

9. Calcula y expresa $z=(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$ en forma polar o exponencial.

   Solución: Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos. Para $z_1=(1-i)$

   $$\text{Módulo:}\,|z_1|= \;|1-i|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

   Argumento: $\theta_{z_1}=\arctan\dfrac{-1}{1}=\arctan -1$, como z_1 está en el cuarto cuadrante, $\theta_{z_1}=-\dfrac{\pi}{4}$

   Para $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)$

   $$\text{Módulo:}\,|z_2|= \;\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

   Argumento: $\theta_{z_2}=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\arctan\sqrt{3}$, como z_2 está en el primer cuadrante, $\theta_{z_2}=\dfrac{\pi}{3}$

   Hacemos el producto en forma exponencial

   $$z_1z_2=\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)\left(2e^{i\pi/3}\right)=2\sqrt{2}e^{i\pi/3+(-i\pi/4)}=2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$$

10. Calcula y expresa $z=\dfrac{(1-i)}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)}$ en forma polar o exponencial.

    Solución: Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos. Notar que el complejo del numerador es z_1 uno de los factores del ejercicio anterior y ya se ha puesto en forma exponencial; mientras que el complejo del denominador es el opuesto de z_2, el otro factor del ejercicio anterior, por tanto para encontrar su forma exponencial lo único que hay que hacer es sumar π al argumento encontrado

    $$z_1=\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)$$

    y

    $$z_2=\left(-1-i\sqrt{3}\right)=2e^{i\pi/3+\pi}=2e^{i4\pi/3}$$

    y el cociente de complejos en forma exponencial:

    $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)}{\left(2e^{i4\pi/3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4-(i4\pi/3)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i19\pi/12}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i5\pi/12}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 5 de febrero de 2009

(Nota: $\overline{z}$ representa el conjugado de z y $z = x + iy$)

1. **(1.25 puntos)** Resuelve en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$4\operatorname{sen}(z) + 5 = 0$$

Solución:

Expresamos $\operatorname{sen}(z)$ en terminos de e^z

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

y hacemos el cambio

$$e^{iz} = w \neq 0$$

y por tanto

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

de donde

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = \frac{w^2 - 1}{2iw}$$

(0.25 puntos).

Sustituimos en la ecuación y obtenemos

$$4\operatorname{sen}(z) + 5 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{w^2 - 1}{2iw}\right) + 5 = 0$$

quitamos el denominador multiplicando por iw, que recordemos no puede ser 0.

$$2\left(w^2 - 1\right) + 5iw = 0$$

y obtenemos una ecuación de segundo grado

$$2w^2 + 5iw - 2 = 0$$

(0.25 puntos).

Resolvemos la ecuación anterior

$$w = \frac{-5i \pm \sqrt{(5i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5i \pm \sqrt{-25 + 16}}{4} = \frac{-5i \pm \sqrt{-9}}{4} = \frac{-5i \pm 3i}{4}$$

luego las soluciones son

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-5i+3i}{4} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i \\ w_2 &= \frac{-5i-3i}{4} = \frac{-8i}{4} = -2i \end{aligned}$$

(0.25 puntos).

Para encontrar el valor de z hay que tomar logaritmos complejos

$$e^{iz} = w \Leftrightarrow iz = \log(w)$$

y tendremos para cada valor de w

$$\begin{aligned} iz_1 &= \log(w_1) = \log\left(-\frac{1}{2}i\right) = \ln\left|-\frac{1}{2}i\right| + i\left(\arg\left(-\frac{1}{2}i\right) + 2k\pi\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ iz_2 &= \log(w_2) = \log(-2i) = \ln|-2i| + i(\arg(-2i) + 2k\pi) = \ln(2) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

y dividiendo por i (o multiplicar por $-i$) para obtener directamente z (observa que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$)

$$\begin{aligned} z_1 &= i\ln(2) + \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ z_2 &= -i\ln(2) + \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

2. Resuelve de forma independiente cada uno de los siguientes apartados:

   (a) **(0.75 puntos)** Encuentra los valores que deben tomar los parámetros A, B, C y D para que la función $f(z)$ sea entera; para ese caso calcula además la expresión de $f'(z)$

   $$f(z) = \left(Ax^3 - 6xy^2 + Bx^2 - 3y^2\right) + i\left(2Bx^2y - Cy^3 + 2Dxy\right)$$

   (b) **(1.25 puntos)** Encuentra, si existe, $u(x,y)$ de manera que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea entera y se cumpla $f(2-i) = 8$, siendo $v(x,y)$ la función definida por:

   $$\operatorname{Im}(f(z)) = v(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$$

   (c) **(0.25 puntos)** Dada $u(x,y) = x^2 + y^2$. ¿Sería posible encontrar una función $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea entera?

Solución:

(a) Como $f(z)$ debe ser una función entera (derivable en todo el cuerpo complejo $\mathbb{C}$) las funciones u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -vx \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \Rightarrow 3Ax^2 - 6y^2 + 2Bx = 2Bx^2 - 3Cy^2 + 2Dx \quad \textit{(0.2 puntos)} \\ u_y &= -v_x \Rightarrow -12xy - 6y = -(4Bxy + 2Dy) \quad \textit{(0.2 puntos)} \end{aligned}$$

Como son funciones polinomiales, los coeficientes en ambos miembros deben coincidir, es decir, el coeficiente de x^2 en el primer miembro, debe ser igual al coeficiente que x^2 tiene en el segundo miembro, esto aplicado a todos los sumandos y a las dos funciones, nos proporciona las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3A &= 2B \\ -6 &= -3C \\ 2B &= 2D \\ -12 &= -4B \\ -6 &= -2D \end{aligned}$$

que tiene como solución

$$\begin{aligned} A &= C = 2 \\ B &= D = 3 \end{aligned}$$

(0.2 puntos)

La función será por tanto

$$f = \left(2x^3 - 6xy^2 + 3x^2 - 3y^2\right) + i\left(6x^2y - 2y^3 + 6xy\right)$$

y su derivada será

$$f'(z) = u_x + iv_x = \left(6x^2 - 6y^2 + 6x\right) + i(12xy + 6y)$$

(0.15 puntos)

(b) En primer lugar tenemos que comprobar is la función $v(x,y)$ es armónica, es decir, cumple la ecuación de Laplace

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Para ello derivamos una vez

$$\begin{aligned} v_x &= 2x + 2y - 1 \\ v_y &= -2y + 2x \end{aligned}$$

y después otra

$$\begin{aligned} v_{xx} &= 2 \\ v_{yy} &= -2 \end{aligned}$$

por tanto sí se cumple la ecuación de Laplace y la función v es armónica y será posible encontrar la función u correspondiente. *(0.25 puntos)*

Para encontrar u utilizamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Aunque da igual el orden, nosotros en primer lugar utilizaremos la primera

$$u_x = v_y \Rightarrow u_x = -2y + 2x$$

(0.2 puntos).

Integrando respecto a x obtendremos la expresión para u

$$u = \int u_x dx = \int (-2y + 2x)\, dx = -2xy + x^2 + C(y)$$

donde $C(y)$ es una constante respecto a x, pero puede que dependa de y.

(0.2 puntos).

Utilizaremos ahora esta expresión para u y la segunda ecuación de Cauchy-Riemann para obtener el valor de $C(y)$.

$$u_y = -v_x \Rightarrow -2x + C'(y) = -(2x + 2y - 1)$$

(0.2 puntos)

Despejando obtenemos

$$C'(y) = -2y + 1$$

en integrando respecto a y

$$C(y) = -y^2 + y + K$$

donde K es ahora una constante respecto de y (y también respecto de x), y la función u es

$$u(x, y) = -2xy + x^2 - y^2 + y + K$$

(0.2 puntos).

En el último apartado tendremos que calcular el valor de K, para que ocurra $f(2 - i) = f(2, -1) = 8$, es decir

$$\begin{aligned} u(2, -1) &= 8 \\ v(2, -1) &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo $(2, -1)$ en las expresiones de u y v

$$\begin{aligned} u(2, -1) &= 6 + 2 \\ v(2, -1) &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$K = 2$$

(0.2 puntos).

(c) Para saber si existe la función v buscada tenemos que comprobar si u es armónica:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \Rightarrow u_{xx} = 2 \\ u_y &= 2y \Rightarrow u_{yy} = 2 \end{aligned}$$

y por tanto

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

luego u no es armónica y por tanto es imposible encontrar u. *(0.25 puntos)*

3. **(1.25 punto)** Calcula el valor de $f^{(20)}(0)$ (Do you remember Taylor?) siendo $f(z)$ la función definida como

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

Solución:

Recordemos que el desarrollo de Taylor de una función en un punto z_0 se obtiene como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)$$

en nuestro caso estamos buscando los datos relativos a

$$\begin{aligned} n &= 20 \\ z_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que hallar el desarrollo de Taylor de $f(z)$ centrado en $z_0 = 0$. Para ello descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+1)}$$

(0.15 puntos) y desarrollamos cada fracción de forma diferente. El cálculo de A y B es muy sencillo

$$A(z+1) + B(z-1) = 1 \Leftrightarrow (A+B)z + (A-B) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(0.15 puntos), luego

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$$

y desarrollando cada fracción

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

para la primera fracción*(0.3 puntos)* y

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

para la segunda *(0.3 puntos),* por tanto

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

y poniéndolo todo dentro del mismo sumatorio

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n\right) z^n$$

por tanto

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n\right)$$

y para $n = 20$

$$f^{(20)}(0) = 20! \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{20}\right) = -20!$$

(0.35 puntos).

4. Calcula de forma razonada y en función de $r > 0$, cada una de las siguientes integrales (en cada caso indica las singularidades y su tipo)

   (a) **(1.25 punto)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^2(z-(1+i))}dz \qquad \gamma(t) = re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$

   (b) **(1.25 punto)** $\displaystyle\int_\gamma z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz \qquad \gamma(t) = 1 + re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$

   (c) **(1.25 punto)** $\displaystyle\int_\gamma 2(\overline{z} - 2)\, dz \qquad \gamma(t) = 2 + re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$

Solución: Calculamos cada integral utilizando el método adecuado:

(a) Se trata de la integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada (circunferencia de centro 0 y radio r), como las funciones racionales sólo tienen singularidades aisladas, el método que tenemos que emplear es el teorema de los residuos. En primer lugar buscamos las singularidades de la función, que en este caso serán los ceros del denominador:

$$z^2\left(z-(1+i)\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=0 \\ \\ z_2=1+i \end{cases}$$

A continuación estudiamos el tipo de cada singularidad.
Para $z_1=0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z^2(z-(1+i))}=\frac{0+1}{0^2\cdot(0-(1+i))}=\frac{1}{0}=\infty \Rightarrow z_1=0 \text{ es un polo}$$

Comprobamos que es un polo doble

$$\lim_{z\to 0} z^2\frac{z+1}{z^2(z-(1+i))}=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{(z-(1+i))}=\frac{1}{-(1+i)}\in\mathbb{C}-\{0\}$$

y el residuo puede calcularse como

$$\operatorname{Res}\left(f\left(z\right),0\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{z+1}{z^2(z-(1+i))},0\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi\left(z\right)}{z^2},0\right)=\frac{\varphi'\left(0\right)}{1!}$$

siendo $\varphi\left(z\right)=\dfrac{z+1}{(z-(1+i))}$ y por tanto

$$\varphi'\left(z\right)=\frac{1\cdot(z-(1+i))-1\cdot(z+1)}{(z-(1+i))^2}=\frac{-2-i}{(z-(1+i))^2}\Rightarrow\varphi'\left(0\right)=\frac{-2-i}{(1+i)^2}=\frac{-2-i}{2i}=-\frac{1}{2}+i$$

luego

$$\operatorname{Res}\left(f\left(z\right),0\right)=\frac{-\frac{1}{2}+i}{1!}=-\frac{1}{2}+i$$

Para $z_2=1+i$ comprobamos que es un polo simple

$$\lim_{z\to 1+i}\left(z-(1+i)\right)\frac{z+1}{z^2(z-(1+i))}=\lim_{z\to 1+i}\frac{z+1}{z^2}=\frac{1+i+1}{(1+i)^2}=\frac{2+i}{2i}=\frac{1}{2}-i\neq 0$$

además con este cálculo también hemos obtenido el valor del residuo de la función en esta singularidad

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+1}{z^2(z-(1+i))},1+i\right)=\frac{1}{2}-i$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver qué singularidades están dentro de la curva, como esta curva depende del radio r, tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0=0$, a cada una de las singularidades

$$\begin{aligned} z_1 &= 0\Rightarrow|z_1-z_0|=|0-0|=|0|=0 \\ \\ z_2 &= 1+i\Rightarrow|z_2-z_0|=|1+i-0|=|1+i|=\sqrt{2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 0 < r < 1 \Rightarrow z_1 \in \overset{\circ}{\gamma}, z_2 \notin \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^2(z-(1+i))} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i \left(-\tfrac{1}{2}+i\right) = -2\pi \\ \\ r > 1 \Rightarrow z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\gamma} \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^2(z-(1+i))} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,1+i)\right) = 0 \end{cases}$$

(b) La función del integrando $z^4 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, tiene una singularidad en $z_1 = 0$ que al estar dentro de una función trascendente es de tipo esencial, por tanto tendremos que utilizar la serie de Laurent del integrando para poder encontrar los residuos y de esta forma calcular el valor de la integral. Este desarrollo es muy sencillo utilizando el desarrollo en series de potencias de la función $\operatorname{sen}(z)$

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$$

y multiplicando por z^4

$$z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^4}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-3}}$$

Buscamos el coeficiente que acompaña a la potencia $z^{-1} = \frac{1}{z}$, en este caso se debe cumplir

$$\frac{1}{z^{2n-3}} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow 2n-3 = 1 \Leftrightarrow n = 2$$

por tanto

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{(-1)^2}{(2\cdot 2+1)!} = \frac{1}{5!}$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver cuando la singularidad está dentro de la curva, como esta curva depende del radio r, tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0 = 1$ a la singularidades

$$z_1 = 0 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |0-1| = |-1| = 1$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 0 < r < 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 \notin \overset{\circ}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_\gamma z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0 \text{ (Teorema de Cauchy-Gourssat)} \\ \\ r > 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_\gamma z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,0)\right) = 2\pi i \left(\tfrac{1}{5!}\right) = \tfrac{\pi i}{60!} \end{cases}$$

(c) Debido a la presencia de la función conjugada $\overline{z}$ dentro del integrando, no es posible utilizar el teorema de los residuos para calcular la integral y es necesario utilizar la definición de integral de una función compleja a lo largo de una curva. Para aplicar la definición de integral a lo largo de una curva, necesitamos el valor de $\gamma'(t)$

$$\gamma(t) = 2 + re^{it}; \quad t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \gamma'(t) = ire^{it}$$

Ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula correspondiente para $f(z) = (\overline{z})^2$ y la curva $\gamma(t)$ descrita

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 2\left(\overline{\gamma(t)} - 2\right)\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\left(\overline{2 + re^{it}} - 2\right)^2 ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} 2\left(2 + re^{-it} - 2\right) ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} 2\left(re^{-it}\right) ire^{it}dt\end{aligned}$$

Realizamos las operaciones correspondientes e integrando se obtiene el valor buscado

$$\int_0^{2\pi} 2\left(re^{-it}\right) ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} 2ir^2 dt = 2ir^2\, t\big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2ir^2 2\pi = 4\pi r^2 i$$

5. **(1.5 puntos)** Utiliza la transformada $\mathcal{Z}$ para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1$$

con condiciones iniciales $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$.

Solución: Para resolver la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1$$

junto con las condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}(y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n)[z] = \mathcal{Z}(1)(z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}(y_{n+2})[z] - \mathcal{Z}(y_{n+1})[z] - 2\mathcal{Z}(y_n)[z] = \mathcal{Z}(1)[z]$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(y_{n+2})[z] &= z^2\mathcal{Z}(y_n)[z] - z^2y_0 - zy_1 = z^2\mathcal{Z}(y_n)[z] \\ \mathcal{Z}(y_{n+1})[z] &= z\mathcal{Z}(y_n)[z] - zy_0 = z\mathcal{Z}(y_n)[z] \\ \mathcal{Z}(y_n)[z] &= \mathcal{Z}(y_n)[z]\end{aligned}$$

y sustituimos en la ecuación

$$\begin{aligned}\left(z^2\mathcal{Z}(y_n)[z]\right) - z\mathcal{Z}(y_n)[z] - 2\mathcal{Z}(y_n)[z] &= \mathcal{Z}(1)[z] \\ \left(z^2 - z - 2\right)\mathcal{Z}(y_n)[z] - z &= \mathcal{Z}(1)[z] \\ \left(z^2 - z - 2\right)\mathcal{Z}(y_n)[z] &= \mathcal{Z}(1)[z]\end{aligned}$$

y despejando

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{\mathcal{Z}(1)[z]}{(z^2 - z - 2)}$$

Calcularemos ahora el valor de $\mathcal{Z}(1)[z]$ utilizando para ello la definición de $\mathcal{Z}(x_n)[z]$

$$\mathcal{Z}(x_n)[z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} \Rightarrow \mathcal{Z}(1)[z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Por tanto

$$\mathcal{Z}(y_n)[z] = \frac{z}{(z-1)(z^2 - z - 2)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z^2 - z - 2)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, en primer lugar hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples. Sólo falta por encontrar las raíces del polinomio de segundo grado que se obtiene mediante la fórmula usual

$$\left(z^2 - z - 2\right) = (z+1)(z-2)$$

y la descomposición en fracciones simples

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - z - 2)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-2}$$

y hallar los desarrollos de Laurent de cada fracción en conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad |z| > 1 \\
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z\left(1 + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 1 \\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2
\end{aligned}$$

Finalmente lo único que queda por hacer es calcular los valores de A, B y C. Para ello utilizamos la descomposición correspondiente

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-2}$$

y sumando las fracciones e igualando numeradores

$$A(z+1)(z-2) + B(z-1)(z-2) + C(z-1)(z+1) = z$$

Y dando a z los valores de las raíces $1, -1$ y 2

$$
\begin{aligned}
z &= 1 \Rightarrow A(1+1)(1-2) = 1 \Leftrightarrow -2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2} \\
z &= -1 \Rightarrow B(-1-1)(-1-2) = -1 \Leftrightarrow 6B = -1 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{6} \\
z &= 2 \Rightarrow C(2-1)(2+1) = 2 \Leftrightarrow 3C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

de donde

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-2}$$

y en forma de serie

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^{n-1} + \frac{2}{3}2^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} \quad |z| > 2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^{n} + \frac{1}{3}2^{n}\right)\frac{1}{z^n} \quad |z| > 2
\end{aligned}
$$

de donde

$$y_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \quad n \geq 1$$

mientras que

$$y_0 = 0$$

Podemos comprobar el valor para $n = 1$ que coincidirá con la condición inicial correspondiennte

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^1 + \frac{1}{3}2^1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 0$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.