Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electrónica)

Examen de operaciones básicas, 12 de febrero de 2009

1. Expresa el número complejo $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ en forma polar o exponencial.
   Solución:
   $$\text{Módulo: } |z| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$
   $$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = \arctan -\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el } 4^o \text{ cuadrante, } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

2. Calcula el inverso de $z = 1 - 5i$ y expresa el resultado en forma binómica.
   Solución: Aplicamos la definición de inverso
   $$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1+5i}{|1-5i|^2} = \frac{1+5i}{1^2 + (-5)^2} = \frac{1}{26} + \frac{5}{26}i$$

3. Calcula el módulo de $z = \dfrac{(1-5i)}{(1-i)^2}$.
   Solución: Utilizando las propiedades de los módulos
   $$|z| = \left|\frac{(1-5i)}{(1-i)^2}\right| = \frac{|(1-5i)|}{|1-i|^2} = \frac{\left(\sqrt{1^2 + (5-)^2}\right)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

4. Calcula $z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)^4$ expresando el resultado en forma binómica.
   Solución: Ponemos en forma polar o exponencial
   $$\text{Módulo: } |z| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
   $$\text{Argumento: } \theta = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \arctan\sqrt{3}, \text{ como } z \text{ está en el tercer cuadrante, } \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$
   y por tanto $z = 2e^{i4\pi/3}$. Si ahora elevamos a 4
   $$z^4 = \left(2e^{i4\pi/3}\right)^4 = 2^4 e^{i16\pi/3} = 16\left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{16\pi}{3}\right)$$

pero

$$\frac{16\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 4\pi + \frac{4\pi}{3}$$

por tanto el ángulo $16\pi/3$ tiene las mismas razones trigonométricas que $4\pi/3$, de donde

$$z^4 = 16\left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{16\pi}{3}\right) == 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i8\sqrt{3}$$

5. Calcula $z = \sqrt[4]{-1}$ y escribe los resultados en forma binómica.

   Solución: Utilizamos la definición de raíz cuarta de -1 utilizando la forma polar o exponencial del radicando $w = -1$:

$$\text{Módulo: } |w| = \ |-1| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Argumento: } \theta_w = \arctan\frac{0}{-1} = \arctan 0, \text{ como } w \text{ está en el eje real negativo, } \theta_w = \pi$$

   Las raíces cuartas de w son

$$w_k = \sqrt[4]{|w|}e^{i\varphi_k} \text{ siendo } \varphi_k = \frac{\theta_w + 2k\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

   por tanto, teniendo en cuenta que $|w| = 1$

$$\begin{aligned}
w_0 &= e^{i\varphi_0} = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w_1 &= e^{i\varphi_1} = e^{i3\pi/4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w_2 &= e^{i\varphi_2} = e^{i5\pi/4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w_3 &= e^{i\varphi_3} = e^{i7\pi/4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

6. Calcula $z = \dfrac{-i+1}{3+8i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\frac{-i+1}{3+8i} = \frac{1-i}{3+8i} = \frac{1-i}{3+8i}\frac{(3-8i)}{(3-8i)} = \frac{(1-i)(3-8i)}{|3-8i|^2} = \frac{3-8i-3i-8}{9+64} = \frac{-5}{73} - \frac{11}{73}i$$

7. Expresa el complejo $z = 2e^{i54\pi/3} = 2_{i54\pi/3}$ en forma binómica.

   Solución: Hay que encontrar un ángulo en $[0, 2\pi]$ equivalente a $54\pi/3$, para ello expresaremos dicho ángulo de otro modo

$$\frac{54\pi}{3} = 18\pi = 9\,(2\pi)$$

   Como es un número entereo de vueltas, el ángulo equivale a 0, de donde

$$z = 2e^{i54\pi/3} = 2e^{i0} = 2$$

8. Calcula $z = \dfrac{(i^{29} - i^{32})}{(i^{410} - i^{107})}$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución: En primer lugar reducimos los exponentes teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las potencias de i.

$$\begin{aligned}
29 &= 4 \cdot 7 + 1 \Rightarrow i^{29} = i^1 = i \\
32 &= 4 \cdot 8 + 0 \Rightarrow i^{32} = i^0 = 1 \\
107 &= 4 \cdot 26 + 3 \Rightarrow i^{107} = i^3 = -i \\
410 &= 4 \cdot 102 + 2 \Rightarrow i^{410} = i^2 = -1
\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{(i^{29} - i^{32})}{(i^{410} - i^{107})} = \frac{i - 1}{-1 - (-i)} = \frac{-1 + i}{-1 + i} = 1$$

9. Calcula y expresa $z = (1 + i)\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ en forma polar o exponencial.

Solución: Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos.

Para $z_1 = (1 + i)$

$$\text{Módulo:} \, |z_1| = \; |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Argumento: } \theta_{z_2} = \arctan \frac{1}{1} = \arctan 1, \text{ como } z_1 \text{ está en el primer cuadrante, } \theta_{z_1} = \frac{\pi}{4}$$

Para $z_2 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)$

$$\text{Módulo:} \, |z_2| = \; \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Argumento: $\theta_{z_1} = \arctan \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan -\sqrt{3}$, como z_1 está en el cuarto cuadrante, $\theta_{z_2} = -\dfrac{\pi}{3}$

Hacemos el producto en forma exponencial

$$z_1 z_2 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)\left(2e^{-i\pi/3}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4 + (-i\pi/3)} = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/12} = 2\sqrt{2}e^{i23\pi/12}$$

10. Calcula y expresa $z = \dfrac{(1 - i)}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)}$ en forma polar o exponencial.

Solución: Como el resultado se pide en forma polar, lo mejor es utilizar la forma polar para cada uno de los complejos. Para $z_1 = 1 - i$, utilizamos que es el conjugado de $(1 + i)$ cuya forma polar encontramos en el apartado anteior, por tanto podemos poner

$$z_1 = (1 - i) = \overline{(1 + i)} = \overline{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

El complejo del denominador $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ya lo hemos puesto en forma polar en el ejercicio anterior:

$$z_2 = 2e^{-i\pi/3}$$

lo único que resta por hacer es realizar el cociente de complejos en forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4-(-i\pi/3)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/12}$$

<u>Nota</u>: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electrónica
Examen de problemas, 12 de febrero de 2009

OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:

1.- Responde razonadamente. Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución podrán ser valoradas con 0 puntos.

2.- Se valorará el correcto uso del vocabulario y la notación empleada; así como la claridad y la presentación de los resultados.

3.- Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar una puntuación 0 en el apartado correspondiente.

4.- Utiliza resultados exactos, sin decimales, recuerda que **no está permitido** el uso de calculadora.

---

1. **(1.0 puntos)** Resuelva la ecuación $e^z = -1 - i$.

Solución: Simplemente tomamos logaritmos complejos

$$\log\left(e^z\right) = \log(-1-i) = \ln|-1-i| + i\arg(-1-i)$$

El módulo y argumento de $-1-i$ lo calculamos fácilmente

$$\text{Módulo:}\, |z| = \quad |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Argumento: $\theta = \arctan \dfrac{-1}{-1} = \arctan 1$, como z está en el 3^{er} cuadrante, $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$

Y sustituyendo en la expresión anterior

$$\log\left(e^z\right) = z = \ln|-1-i| + i\arg(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

o simplificando utilizando las propiedades de los logaritmos

$$z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

2. **(1.25 puntos)** Encuentra, si existe, $v(x,y)$ de manera que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$ y se cumpla $f(-1-i) = 0 + 2i$ siendo $u(x,y)$ la función definida por:

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x,y) = y^3 + x^2 - y^2 - 3x^2y + 2x$$

Solución: En primer lugar debemos comprobar que la función $v(x,y)$ existe, para ello tendremos que comprobar que $u(x,y)$ es armónica, es decir, cumple la ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, lo que hacemos fácilmente derivando parcialmente respecto a x e y de forma adecuada

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 2x - 6xy + 2 \Rightarrow u_{xx} = 2 - 6y \\ \\ u_y = 3y^2 - 2y - 3x^2 \Rightarrow u_{yy} = 6y - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = (2-6y) + (6y-2) = 0$$

Para encontrar el valor de $v(x,y)$ y puesto que queremos que $f(z)$ sea entera, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$

$$\left.\begin{array}{r} u_x = v_y = 2x - 6xy + 2 \\ \\ u_y = -v_x = 3y^2 - 2y - 3x^2 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación integramos respecto a y (se puede comenzar por la otra si se prefiere)

$$v = \int v_y dy = \int (2x - 6xy + 2)\, dy = 2xy - 3xy^2 + 2y + C(x)$$

siendo $C(x)$ una función constante respecto a y, aunque puede no serlo respecto a x.

Derivando v respecto a x y utilizando la segunda ecuación de Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{array}{r} v_x = 2y - 3y^2 + C'(x) \\ \\ -u_y = -\left(3y^2 - 2y - 3x^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 2y - 3y^2 + C'(x) = -\left(3y^2 - 2y - 3x^2\right) = -3y^2 + 2y + 3x^2$$

de donde se obtiene

$$C'(x) = 3x^2 \Rightarrow C(x) = x^3 + K$$

donde ahora K es una constante. La función $v(x,y)$ buscada pertenece a la familia

$$v(x,y) = 2xy - 3xy^2 + 2y + x^3 + K$$

Y la función $f(z)$ es

$$f(z) = f(x+iy) = \left\{y^3 + x^2 - y^2 - 3x^2y + 2x\right\} + i\left\{2xy - 3xy^2 + 2y + x^3 + K\right\}$$

Para obtener el valor de K, tendremos que aplicar las condiciones del enunciado: $f(-1-i) = 0 + 2i$

$$\begin{aligned} f(-1-i) &= = \{-1 + 1 - 1 + 3 - 2\} + i\{2 + 3 - 2 - 1 + K\} \\ \\ &= \{0\} + i\{2 + K\} = 0 + 2i \end{aligned}$$

y por tanto $K = 0$.

Se considera la función

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-2i)}$$

(a) **(0.75 puntos)** Calcule su serie de Taylor centrada en $z_0 = 0$.

(b) **(0.75 puntos)** Calcule su serie de Laurent en el conjunto $A = \{\, z \in \mathbb{C} | \quad 1 < |z| < 2 \}$.

Solución: En ambos casos se buscan los desarrollos de la función $f(z)$ en potencias de z. Realizamos la descomposición de $f(z)$ en fracciones simples de la forma

$$\frac{1}{(z+i)(z-2i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-2i} = \frac{A(z-2i) + B(z+i)}{(z+i)(z-2i)}$$

igualando numeradores

$$1 = A\,(z-2i) + B\,(z+i)$$

como la expresión es válida para todos los complejos z, utilizaremos dos valores para encontrar los coeficientes

$$z = -i \Rightarrow 1 = A\,(-i-2i) \Leftrightarrow 1 = -3Ai \Leftrightarrow A = -\frac{1}{3i} \Leftrightarrow A = \frac{i}{3}$$

$$z = 2i \Rightarrow 1 = B\,(2i+i) \Leftrightarrow 1 = 3Bi \Leftrightarrow B = \frac{-i}{3}$$

y la función se expresa en fracciones simples como

$$\frac{1}{(z+i)\,(z-2i)} = \frac{i}{3}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{3}\frac{1}{z-2i}$$

Ahora tendremos que expresar cada fracción simple en la correspondiente serie de potencias. Lo haremos de forma individual y para cada uno de los conjuntos y utilizando como siempre la suma de una progresión geométrica con razón menor que la unidad

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ siempre que } |z| < 1$$

(a) Serie de Taylor centrada en $z_0 = 0$. La distancia que hay entre $z_0 = 0$ y la primera singularidad i es 1, por tanto ese será el radio de convergencia de la serie y dicha serie estará definida en el conjunto $B\,(0,1)$ como veremos después.

i. Fracción $\frac{1}{z+i}$: Podemos utilizar el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{i}\right)} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n$$

que es válido siempre que $\left|\frac{z}{i}\right| < 1$ o teniendo en cuenta que $|i| = 1$, que $|z| < 1$. Notar que si utilizamos la otra descomposición $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z}\right)^n$ nos porporcionaría potencias negativas, pero en ese caso no nos serviría para el desarrollo de taylor, donde todas las potencias deben ser positivas.

ii. Fracción $\frac{1}{z-2i1}$: Podemos utilizar el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\frac{z}{2i}-1} = -\frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{z}{2i}} = -\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n$$

que es válido siempre que $\left|\frac{z}{2i}\right| < 1$ o teniendo en cuenta que $|2i| = 2$, que $|z| < 2$.

Luego si $|z| < 1$, los dos desarrollos anteriores serán válidos y por tanto sustituyendo y simplificando

$$\frac{1}{(z+i)\,(z-2i)} = \frac{i}{3}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{3}\frac{1}{z-2i} = \frac{i}{3}\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n - \frac{i}{3}\left(-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3i^n}+\frac{1}{6\,(2i)^n}\right)z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3i^n}\left((-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

(b) $A=\{z\in\mathbb{C}|\quad 1<|z|<2\}$. También en este caso $z_0=0$

i. Fracción $\frac{1}{z+i}$: Si realizamos el el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^n}{z^{n+1}}$$

que es válido siempre que $\left|\frac{i}{z}\right|<1$ o teniendo en cuenta que $|i|=1$, que $|z|>1$, tal y como ocurre en el conjunto A.

ii. Fracción $\frac{1}{z-2i1}$: Puesto que $|z|<2$, podemos seguir utilizando el desarrollo anterior para esta fracción, ya que

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{2i}\frac{1}{\frac{z}{2i}-1}=-\frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{z}{2i}}=-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2i)^n}$$

que es válido siempre que $\left|\frac{z}{2i}\right|<1$ o teniendo en cuenta que $|2i|=2$, que $|z|<2$.

Luego si $1<|z|<2$, los dos desarrollos anteriores serán válidos y

$$\frac{1}{(z+i)(z-2i)} = \frac{i}{3}\frac{1}{z+i}-\frac{i}{3}\frac{1}{z-2i}=\frac{i}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^n}{z^{n+1}}-\frac{i}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2i)^n}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^{n+1}}{z^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n i^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{i^n}{z^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n i^{n+1}}$$

3. Calcula de forma razonada y en función de $r>0$, cada una de las siguientes integrales. En cada caso indique las singularidades y su tipo.

(a) **(1.25 punto)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+i}{z(z-1)^2}dz \qquad \gamma(t)=re^{it};\quad t\in[0,2\pi]$

(b) **(1.25 punto)** $\displaystyle\int_\gamma z^5\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz \qquad \gamma(t)=1+re^{it};\quad t\in[0,2\pi]$

Solución: Resolvemos cada integral de forma independiente:

(a) Se trata de la integral de una función racional a lo largo de una curva cerrada (circunferencia de centro 0 y radio r), como las funciones racionales sólo tienen singularidades aisladas, el método que tenemos que emplear es el teorema de los residuos. En primer lugar buscamos las singularidades de la función, que en este caso serán los ceros del denominador:

$$z\left(z-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

A continuación estudiamos el tipo de cada singularidad.
Para $z_1 = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z+i}{z\left(z-1\right)^2} = \frac{0+i}{0^2\cdot(0-1)} = \frac{i}{\infty} \Rightarrow z_1 = 0 \text{ es un polo}$$

Comprobamos que es un polo simple

$$\lim_{z\to 0} z\frac{z+i}{z\left(z-1\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z+i}{\left(z-1\right)^2} = \frac{0+i}{\left(0-1\right)^2} = \frac{i}{1} = i \neq 0$$

además con este cálculo también hemos obtenido el valor del residuo de la función en esta singularidad

$$\text{Res}\left(\frac{z+i}{z\left(z-1\right)^2}, 0\right) = -i$$

Para $z_2 = 1$

$$\lim_{z\to 1} \frac{z+i}{z\left(z-1\right)^2} = \frac{1+i}{1^2\cdot(1-1)} = \frac{1+i}{0} = \infty \Rightarrow z_2 = 1 \text{ es un polo}$$

Comprobamos que es un polo doble

$$\lim_{z\to 1} \left(z-1\right)^2 \frac{z+i}{z\left(z-1\right)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{(z+i)}{z} = \frac{1+i}{1} = 1+i \in \mathbb{C}-\{0\}$$

y el residuo puede calcularse como

$$\text{Res}\left(f\left(z\right), 1\right) = \text{Res}\left(\frac{z+i}{z\left(z-1\right)^2}, 1\right) = \text{Res}\left(\frac{\varphi\left(z\right)}{\left(z-1\right)^2}, 1\right) = \frac{\varphi'\left(1\right)}{1!}$$

siendo $\varphi\left(z\right) = \frac{z+i}{z}$ y por tanto

$$\varphi'\left(z\right) = \frac{1\cdot z - 1\cdot(z+i)}{z^2} = \frac{-i}{z^2} \Rightarrow \varphi'\left(1\right) = \frac{-i}{\left(1\right)^2} = -i$$

luego

$$\text{Res}\left(f\left(z\right), 1\right) = \frac{-i}{1!} = -i$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver qué singularidades están dentro de la curva, como esta curva depende del radio r, tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0 = 0$, a cada una de las singularidades

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |0 - 0| = |0| = 0 \\ z_2 &= 1 \Rightarrow |z_2 - z_0| = |1 - 0| = |1| = 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 0 < r < 1 \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_2 \notin \mathring{\gamma} \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \frac{z+i}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \cdot i = -2\pi \\ r > 1 \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathring{\gamma} \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \frac{z+i}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)) = 2\pi i (i + (-i)) = 0 \end{cases}$$

(b) La función del integrando $z^5 \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$, tiene una singularidad en $z_1 = 0$ que al estar dentro de una función trascendente es de tipo esencial, por tanto tendremos que utilizar la serie de Laurent del integrando para poder encontrar los residuos y de esta forma calcular el valor de la integral. Este desarrollo es muy sencillo utilizando el desarrollo en series de potencias de la función $\cos(z)$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}}$$

y multiplicando por z^5

$$z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{z^5}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-5}}$$

Buscamos el coeficiente que acompaña a la potencia $z^{-1} = \frac{1}{z}$, en este caso se debe cumplir

$$\frac{1}{z^{2n-5}} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow 2n - 5 = 1 \Leftrightarrow n = 3$$

por tanto

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{(-1)^3}{(2 \cdot 3)!} = \frac{-1}{6!} = -\frac{1}{720}$$

Para finalizar el ejercicio tendremos que ver cuando la singularidad está dentro de la curva, como esta curva depende del radio r, tendremos que distinguir cada uno de los casos. Calculamos las distancias del centro $z_0 = 1$ a la singularidades

$$z_1 = 0 \Rightarrow |z_1 - z_0| = |0 - 1| = |-1| = 1$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 0 < r < 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 \notin \overset{\circ}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_\gamma z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0 \text{ (Teorema de Cauchy-Gourssat)} \\ \\ r > 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_\gamma z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, 0)\right) = 2\pi i \left(\tfrac{-1}{6!}\right) = -\tfrac{\pi i}{360!} \end{cases}$$

4. **(1.25 punto)** Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}^2 dz$, a lo largo del segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. Se recuerda que $\overline{z}$ denota el conjugado de z.

Solución: Debido a la presencia de la función conjugada $\overline{z}$ dentro del integrando (además la curva no es cerrada), no es posible utilizar el teorema de los residuos para calcular la integral y es necesario utilizar la definición de integral de una función compleja a lo largo de una curva. En primer lugar necesitamos conocer la expresión (parametrización) de la curva, que al ser un segmento lineal es muy sencilla utilizando la definición correspondiente

$$\gamma(t) = (1-t)\, z_1 + t z_2 \quad t \in [0,1]$$

con $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + i$, obtenemos

$$\gamma(t) = t(1+i) = t + it \quad t \in [0,1]$$

Para aplicar la definición de integral a lo largo de una curva, necesitamos el valor de $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (1+i)$$

Ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula correspondiente para $f(z) = (\overline{z})^2$ y la curva $\gamma(t)$ descrita

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 \left(\overline{\gamma(t)}\right)^2 \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(\overline{t(1+i)}\right)^2 (1+i)\, dt = \int_0^1 t^2 (1-i)^2 (1+i)\, dt \end{aligned}$$

Realizamos las operaciones correspondientes e integrando se obtiene el valor buscado

$$(1-i)^2 (1+i) \int_0^1 t^2 dt = (2-2i) \int_0^1 t^2 dt = (2-2i) \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}(2-2i) = \frac{2}{3}(1-i)$$

5. Resuelve cada uno de los siguientes apartados:

(a) **(1.25 puntos)** Calcule, teniendo en cuenta la definición y propiedades, la transformada $\mathcal{Z}$ de la sucesión $x_n = n^2 2^n$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcule la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de la función $F(z) = \frac{1}{(z-1)(z)(z+1)}$

Solución: Resolvemos cada apartado de forma independiente

(a) Utilizamos la propiedad de la potenciación

$$\mathcal{Z}\left[n^k y_n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \left(\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)\right)$$

en este caso

$$\left.\begin{array}{r} k=2 \\ y_n=2^n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{Z}\left[n^2 2^n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 \left(\mathcal{Z}\left[2^n\right](z)\right)$$

Para $y_n = 2^n$ utilizando la definición (o la propiedad correspondiente)

$$\left(\mathcal{Z}\left[2^n\right](z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2} \quad \text{si } |z| > 2$$

Sustituyendo

$$\mathcal{Z}\left[n^2 2^n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 \left(\frac{z}{z-2}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-2}\right)\right)$$

o en pasos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-2}\right) &= \frac{1(z-2) - z\cdot 1}{(z-2)^2} = \frac{-2}{(z-2)^2} \\
-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-2}\right) &= -z\left(\frac{-2}{(z-2)^2}\right) = \frac{2z}{(z-2)^2} \\
\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{(z-2)^2}\right) &= \frac{2(z-2)^2 - 2(z-2)2z}{(z-2)^4} = \frac{2(z-2)-4z}{(z-2)^3} = \frac{-2z-4}{(z-2)^3} \\
-z\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{(z-2)^2}\right) &= -z\left(\frac{-2z-4}{(z-2)^3}\right) = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}
\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{Z}\left[n^2 2^n\right](z) = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}$$

6. Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, en primer lugar hay que hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples:

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)z(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z+1}$$

y hallar los desarrollos de Laurent de cada fracción en conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n}} \quad |z|>1 \\
\frac{1}{z} &= \frac{1}{z} \quad |z|>1 \\
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{z}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^{n}} \quad |z|>1
\end{aligned}$$

Calcularemos ahora los valores de A, B y C

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z+1} = \frac{Az(z+1) + B(z-1)(z+1) + C(z-1)z}{(z-1)z(z+1)}$$

es decir

$$\frac{1}{(z-1)z(z+1)} = \frac{Az(z+1) + B(z-1)(z+1) + C(z-1)z}{(z-1)z(z+1)}$$

e igualando numeradores

$$Az(z+1) + B(z-1)(z+1) + C(z-1)z = 1$$

Como son raíces simples podemos utilizar dichos valores para calcular los coeficientes

$$\begin{aligned}
z &= 0 \Rightarrow B(0-1)(0+1) = 1 \Leftrightarrow -B = 1 \Leftrightarrow B = -1 \\
z &= 1 \Rightarrow A\cdot 1(1+1) = 1 \Leftrightarrow A2 = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \\
z &= -1 \Rightarrow C(-1-1)(-1) = 1 \Leftrightarrow C2 = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)z(z+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$$

y utilizando las series

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n}} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^{n}}$$

Podemos simplificar extrayendo el primer sumando en cada sumatorio

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n}} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{z^{n}} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^{n}}$$

Ahora reunimos en un único sumatorio

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty}x_n\frac{1}{z^{n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}\right)\frac{1}{z^{n}}$$

la solución buscada es identificando elementos

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(-1)^{n-1}\right) \qquad n \geq 2
\end{aligned}
$$

<u>Nota</u>: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de Ejercicios Básicos y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de Problemas.