Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica

Examen de operaciones básicas, 12 de septiembre de 2008

1. **Calcula** $\frac{1}{i}$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

2. **Calcula** $(2-3i)^3$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

3. **Calcula** $\overline{(-2+i)(1-i)}(3-i)$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

4. **Calcula** $\frac{(1-2i)}{(1+i)(2-3i)}$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

5. **Calcula el módulo de** $\frac{(\sqrt{5}-2i)}{(-4+3i)}$.

6. **Calcula** $\sqrt[3]{-64}$ **y escribe el resultado en forma binómica.**

7. **Expresa** $-8-8i$ **en forma polar, expresando el ángulo en radianes.**

8. **Expresa** $\frac{(i^{23}+3i^{52})}{(i^{91}-2i^{246})}$ **en forma binómica.**

9. **Expresa** $\frac{(1+\sqrt{3}i)}{(1-i)}$ **en forma polar, expresando el ángulo en radianes.**

10. **Expresa** $\frac{2e^{i\pi/3}6e^{i17\pi/12}}{4e^{-i\pi/4}}$ **en forma binómica.**

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 12 de septiembre de 2008

1. **(1.25 puntos) Resuelve la ecuación**

$$\cos(iz) + 3i\operatorname{sen}(iz) + 1 = 0$$

Solución: Tenemos en cuenta la definición de $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos(iz) = \frac{e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \operatorname{sen}(iz) = \frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$\frac{e^{-z}+e^{z}}{2} + 3i\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} + 1 = 0$$

obtenemos

$$\frac{e^{-z}+e^{z}}{2} + 3\frac{e^{-z}-e^{z}}{2} + 1 = 0$$

y multiplicando por 2

$$e^{-z}+e^{z}+3\left(e^{-z}-e^{z}\right)+2=0$$

y agrupando

$$4e^{-z}-2e^{z}+2=0$$

Hacemos el cambio

$$e^{z}=w \Rightarrow e^{-z}=\frac{1}{e^{z}}=\frac{1}{w}$$

que en la ecuación

$$4\frac{1}{w}-2w+2=0$$

Finalmente multiplicamos por w (notar que como $w=e^{z}\neq 0$) para obtener la ecuación de segundo grado

$$w^2-w-2=0$$

que tiene por soluciones

$$w_1 = 2$$

$$w_2 = -1$$

a continuación deshacemos el cambio tomando logaritmos

$$w_1=2\Rightarrow e^{z_1}=2\Rightarrow z_1=L(2)=\ln(|2|)+i\left(0+2\grave{k}\pi\right)=\ln(2)+i2\grave{k}\pi$$

$$w_2=-1\Rightarrow e^{z_2}=-1\Rightarrow z_2=L(-1)=\ln(|-1|)+i\left(\pi+2\grave{k}\pi\right)=\ln(1)+i\left(\pi+2\grave{k}\pi\right)=i\left(\pi+2\grave{k}\pi\right)$$

2. **Calcula las siguientes integrales sobre los caminos indicados en función del valor de $r > 0$**

$$a) \int_{\gamma_1} \frac{dz}{2z^2 - 5iz - 2} \qquad \gamma_1(t) = re^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$b) \int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)^n} dz \qquad \gamma_1(t) = i + re^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$c) \int_{\gamma} \overline{z} dz \qquad \gamma_1(t) = re^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Cada integral vale 1 punto.

- *a)* La función $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5iz - 2}$ es una función racional, por tanto, sus singularidades son aisladas y coinciden con los ceros del denominador y como la curva es cerrada, la integral se puede calcular mediante el teorema de los residuos.

  Buscamos en primer lugar las singularidades de f, para ello buscamos los ceros de su denominador, resolviendo la correspondiente ecuación de segundo grado

$$2z^2 - 5iz - 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5i \pm \sqrt{(5i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{5i \pm \sqrt{-25 + 16}}{4} = \frac{5i \pm \sqrt{-9}}{4} = \frac{5i \pm 3i}{4}$$

  tendremos dos soluciones

$$z_1 = \frac{5i + 3i}{4} = \frac{8i}{4} = 2i$$

$$z_2 = \frac{5i - 3i}{4} = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2}$$

  y la función queda puede escribirse como

$$f(z) = \frac{1}{2(z - 2i)\left(z - \frac{i}{2}\right)}$$

  (Hay que notar que el coeficiente de z^2 de la ecuación es 2 y por tanto este factor debe aparecer en la descomposición en factores del polinomio).

  Ambas sigularidades son polos simples y el cálculo de los residuos correspondientes es muy sencillo

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2(z - 2i)\left(z - \frac{i}{2}\right)}, 2i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{1}{2\left(z - \frac{i}{2}\right)}}{(z - 2i)}, 2i\right) = \frac{1}{2\left(2i - \frac{i}{2}\right)} = \frac{1}{4i - i} = \frac{1}{3i} = \frac{-i}{3}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2(z - 2i)\left(z - \frac{i}{2}\right)}, \frac{i}{2}\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{1}{2(z - 2i)}}{\left(z - \frac{i}{2}\right)}, 2i\right) = \frac{1}{2\left(\frac{i}{2} - 2i\right)} = \frac{1}{i - 4i} = \frac{1}{-3i} = \frac{i}{3}$$

Para utilizar el teorema de los residuos, necesitamos saber qué singularidades están dentro de la curva para cada valor del radio r. Para ello calcularemos la distancia del centro de la circunferencia a cada una de las singularidades

$$\text{Distancia del centro a } z_1 \quad \Rightarrow \quad |0-2i| = \sqrt{(0)^2+(2)^2} = 2$$

$$\text{Distancia del centro a } z_2 \quad \Rightarrow \quad \left|0-\frac{i}{2}\right| = \sqrt{(0)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Notar que $\frac{1}{2} < 2$ y podemos distinguir 3 casos:

$r < \frac{1}{2}$, en este caso ninguna de las dos singularidades está dentro de la curva y por tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0 \quad r < \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < r < 2$, en este caso solamente la singularidad $\frac{i}{2}$ está dentro de la curva, por tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2(z-2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}, \frac{i}{2}\right) = 2\pi i\left(\frac{i}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3} \quad \text{si } \frac{1}{2} < r < 2$$

$r > 2$, en este caso las dos singularidades están dentro de la curva, por tanto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz &= 2\pi i \left\{\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2(z-2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}, \frac{i}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2(z-2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}, 2i\right)\right\} \\ &= 2\pi i\left(\frac{i}{3}+\left(-\frac{i}{3}\right)\right) = 0 \quad r > 2\end{aligned}$$

Los casos $r=2$ y $r=1/2$ no se tienen en cuenta, puesto que la curva pasa por las singularidades y no es posible calcular la integral.

- La función del integrando $\frac{e^z}{(z-1)^n}$ tiene una única singularidad en $z_0 = 1$, que es el único complejo que anula el denominador, además es un polo de orden. El residuo de la función en esta singularidad se calcula teniendo en cuenta que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^n}\right) = \frac{\phi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

siendo $\phi^{(n-1)}(z)$ la derivada $n-1$–ésima de la función ϕ, en este caso como $\phi^{(n-1)}(z_0) = e^{z_0}$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^n}, 1\right) = \frac{e^1}{(n-1)!}$$

Como la integral depende del radio tenemos que encontrar la distancia entre el centro y la singularidad

$$|1-i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

luego tenemos que distinguir dos casos

$r < \sqrt{2}$, en este caso ninguna de las dos singularidades está dentro de la curva y por tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = 0 \quad r < \sqrt{2}$$

$r > \sqrt{2}$, en este caso la singularidad 1 está dentro de la curva, por tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^n}, 1\right) = \frac{2\pi i e}{(n-1)!} \quad \text{si } r > \sqrt{2}$$

El caso $r = \sqrt{2}$ no se tiene en cuenta, puesto que la curva pasa por la singularidade y no es posible calcular la integral.

- La función

$$f(z) = \overline{z}$$

no es derivable en ningún punto, puesto que en el numerador aparece la función conjugada, por tanto no podremos utilizar el teorema de los residuos y hay que emplear la definición de integral a lo largo de una curva

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

siendo

$$\begin{aligned} \gamma &: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma(t) &= re^{it} \quad t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \gamma'(t) = ire^{it} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\gamma_2} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \overline{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} re^{-it} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} ir^2 dt$$

e integrando directamente

$$\int_0^{2\pi} ir^2 dt = ir^2 t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i r^2$$

3. **(1.25 puntos) Dada la función**

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + iz + 2}$$

Construye su serie de Laurent en el anillo $A(0,1,2)$**.**

Solución: En primer lugar buscamos las raíces del denominador para descomponer la función en fracciones simples

$$z^2+iz+2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-i \pm \sqrt{(i)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-i+3i}{2} = i \\ z_2 = \frac{-i-3i}{2} = -2i \end{cases}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + iz + 2} = \frac{1}{(z+2i)(z-i)}$$

La descomposición en factores simples es la siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-i)} = \frac{A}{(z-i)} + \frac{B}{(z+2i)} = \frac{A(z+2i) + B(z-i)}{(z+2i)(z-i)}$$

Por tanto

$$A(z+2i) + B(z-i) = 1 \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{matrix}\right\}$$

y la función es

$$f(z) = \frac{1}{3(z-i)} + \frac{2}{3(z+2i)}$$

El desarrollo de Taylor (potencias positivas de z) de cada fracción es muy sencillo

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z\left(1 - \dfrac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}} \quad \text{si } \left|\frac{i}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

$$\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{2i\left(\frac{z}{2i}+1\right)} = \frac{1}{2i\left(1+\frac{z}{2i}\right)} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2i}\right)^n \quad \text{si } \left|\frac{z}{2i}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$$

por tanto

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2i}\right)^n \quad \text{si } 1 < |z| < 2$$

4. **(1.25 puntos) Calcula de forma razonada (sin utilizar tablas) la transformada** Z **de la sucesión**

$$x_n = n^2 2^n \quad n \geq 0$$

Solución: Aplicando

$$\mathcal{Z}\left(n^2 z^n\right) = -z\frac{d}{dz}\left\{-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left[2^n\right]\right\}$$

por tanto tenemos que calcular $\mathcal{Z}[2^n]$

$$\mathcal{Z}[2^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}$$

por tanto

$$\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[2^n] = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-2}\right) = \frac{(z-2)-z}{(z-2)^2} = \frac{-2}{(z-2)^2}$$

y de ahí

$$-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[2^n] = -z\left(\frac{-2}{(z-2)^2}\right) = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

y repetimos el proceso otra vez con esta nueva función

$$\frac{d}{dz}\left\{-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[2^n]\right\} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{2z}{(z-2)^2}\right\} = \frac{2(z-2)^2 - 2(z-2)2z}{(z-2)^4} = \frac{2(z-2)^2 - 4z(z-2)}{(z-2)^4} = \frac{-2z-4}{(z-2)^3}$$

y finalmente

$$\mathcal{Z}\left(n^2 z^n\right) = -z\frac{d}{dz}\left\{-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[2^n]\right\} = -z\left(\frac{-2z-4}{(z-2)^3}\right) = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}$$

5. **(2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación diferencial**

$$y''' + y'' = \operatorname{sen}(2t)$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= y'(0) = 0 \\ y''(0) &= 1 \end{aligned}$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, utilizando las propiedades de linealidad y derivada

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](z) = a\mathcal{L}[f(t)](z) + b\mathcal{L}[g(t)](z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'''(t)](z) &= z^3\mathcal{L}[y(t)](z) - z^2 y(0) - zy'(0) - y''(0) \\ \mathcal{L}[y''(t)](z) &= z^2\mathcal{L}[y(t)](z) - zy(0) - y'(0) \end{aligned}$$

por tanto sobre la ecuación del ejercicio y utilizando las condiciones iniciales

$$\mathcal{L}[y''' + y''](z) = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](z)$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y'''\right](z)+\mathcal{L}\left[y''\right](z) &= \mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(2t)\right](z) \\
\left(z^3\mathcal{L}\left[y(t)\right](z)-1\right)+z^2\mathcal{L}\left[y\right](z) &= \frac{2}{z^2+4}
\end{aligned}
$$

y sacando $\mathcal{L}[y](z)$ factor común

$$\left(z^3+z^2\right)\mathcal{L}[y](z)=\frac{2}{z^2+4}-1$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z)=\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)\left(z^3+z^2\right)}=\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2(z+1)}$$

El cálculo de la transformada de Laplace de la función $\operatorname{sen}(2t)$ se hace mediante las propiedades de la transformada de Laplace o directamente aplicando la definición

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(2t)\right](z)=\int_0^{\infty}\operatorname{sen}(2t)\,e^{-zt}dt=\int_0^{\infty}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i}e^{-zt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{\infty}e^{i2t}e^{-zt}-e^{-i2t}e^{-zt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{\infty}e^{t(}$$

e integrando

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(2t)\right](z) &= \frac{1}{2i}\left.\frac{e^{t(2i-z)}}{2i-z}\right|_0^{\infty}+\frac{1}{2i}\left.\frac{e^{-t(2i+z)}}{2i+z}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{2i+z}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{2i+z}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{(2i+z)-(z-2i)}{(z-2i)(z+2i)}\right)=\frac{1}{2i}\frac{4i}{z^2+4}=\frac{2}{z^2+2}
\end{aligned}
$$

Para encontrar $y(t)$, la solución de la ecuación diferencial, tendremos que calcular la transformada de Laplace inversa de la función anterior.

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2(z+1)}\right](t)$$

que calculamos mediante la fórmula de Bronwich

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2(z+1)}\right](t)=\sum_{z_k}\operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2(z+1)},z_k\right)$$

siendo z_k las singularidades de la función que en este caso son

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0\Rightarrow \text{ Polo doble} \\
z_1 &= 2i\Rightarrow \text{ Polo simple} \\
z_2 &= -2i\Rightarrow \text{ Polo simple} \\
z_3 &= -1\Rightarrow \text{ Polo simple}
\end{aligned}
$$

Calcularemos estos residuos. Para $z_0 = 0$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2\left(z+1\right)},0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)/\left(z^2+4\right)\left(z+1\right)}{z^2},0\right) = \frac{\phi_0'\left(0\right)}{1!} = \phi_0'\left(0\right)$$

siendo

$$\phi_0\left(z\right) = \frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)}{\left(z^2+4\right)\left(z+1\right)}$$

y si derivamos

$$\phi_0'\left(z\right) = \frac{\left\{te^{zt}\left(z^2+6\right)+e^{zt}2z\right\}\left(z^2+4\right)\left(z+1\right)-e^{zt}\left(z^2+6\right)\left\{2z\left(z+1\right)+\left(z^2+4\right)\right\}}{\left(\left(z^2+4\right)\left(z+1\right)\right)^2} \Rightarrow \phi_0'\left(0\right) = \frac{3t-3}{2}$$

Para $z_1 = 2i$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2\left(z+1\right)},2i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)/\left(z+2i\right)z^2\left(z+1\right)}{z-2i},2i\right) = \frac{\phi_1\left(2i\right)}{0!} = \phi_1\left(2i\right)$$

siendo

$$\phi_1\left(z\right) = \frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)}{\left(z+2i\right)z^2\left(z+1\right)}$$

por tanto

$$\phi_1\left(2i\right) = \frac{e^{2it}\left(\left(2i\right)^2+6\right)}{\left(2i+2i\right)\left(2i\right)^2\left(2i+i\right)} = -\frac{e^{i2t}}{8i\left(1+2i\right)}$$

Para $z_1 = -2i$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2\left(z+1\right)},-2i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)/\left(z-2i\right)z^2\left(z+1\right)}{z+2i},2i\right) = \frac{\phi_2\left(-2i\right)}{0!} = \phi_2\left(-2i\right)$$

siendo

$$\phi_2\left(z\right) = \frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)}{\left(z-2i\right)z^2\left(z+1\right)}$$

por tanto

$$\phi_2\left(2i\right) = \frac{e^{-2it}\left(\left(-2i\right)^2+6\right)}{\left(-2i-2i\right)\left(-2i\right)^2\left(-2i+i\right)} = \frac{e^{-i2t}}{8i\left(1-2i\right)}$$

Para $z_2 = -1$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z^2+6}{\left(z^2+4\right)z^2\left(z+1\right)},-1\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)/\left(z^2+4\right)z^2}{\left(z+1\right)},-1\right) = \frac{\phi_3\left(-1\right)}{0!} = \phi_3\left(-1\right)$$

siendo

$$\phi_3\left(z\right) = \frac{e^{zt}\left(z^2+6\right)}{\left(z^2+4\right)z^2}$$

por tanto

$$\phi_3\left(-1\right) = \frac{e^{-t}\left(\left(-1\right)^2+6\right)}{\left(\left(-1\right)^2+4\right)\left(-1\right)^2} = \frac{7}{5}e^{-t}$$

y sumando todos los residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^2+6}{(z^2+4)\,z^2\,(z+1)}\right](t)=\left(\frac{3t-3}{2}\right)+\left(-\frac{e^{i2t}}{8i\,(1+2i)}\right)+\left(\frac{e^{-i2t}}{8i\,(1-2i)}\right)+\left(\frac{7}{5}e^{-t}\right)$$

Para expresar la función como una función real, se suman los residuos en $2i$ y $-2i$, que como podemos comprobar son conjugados

$$\begin{aligned}\left(-\frac{e^{i2t}}{8i\,(1+2i)}\right)+\left(\frac{e^{-i2t}}{8i\,(1-2i)}\right) &= \frac{-e^{i2t}\,(1-2i)+e^{-i2t}\,(1+2i)}{8i\,(1+2i)\,(1-2i)}=\frac{-e^{i2t}+2ie^{i2t}+e^{-i2t}+2ie^{-i2t}}{8i\,(1^2+2^2)}\\ &= \frac{(e^{-i2t}-e^{i2t})+i2\,(e^{i2t}+e^{-i2t})}{40i}\\ &= \frac{(e^{-i2t}-e^{i2t})}{40i}+\frac{i2\,(e^{i2t}+e^{-i2t})}{40i}\\ &= -\frac{1}{20}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i}+\frac{1}{10}\frac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{2}\\ &= -\frac{1}{20}\operatorname{sen}(2t)+\frac{1}{10}\cos(2t)\end{aligned}$$

y por tanto la solución $y\,(t)$ buscada será

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^2+6}{(z^2+4)\,z^2\,(z+1)}\right](t)=\left(\frac{3t-3}{2}\right)+\left(\frac{7}{5}e^{-t}\right)-\frac{1}{20}\operatorname{sen}(2t)+\frac{1}{10}\cos(2t)$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.