Examen de operaciones básicas, 13 de septiembre de 2007

1. Calcula $i \cdot (1-2i)$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Operamos
   $$i \cdot (1-2i) = i - 2i^2 = i - 2(-1) = 2 + i$$

2. Calcula $(2-i)^2$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Aplicamos la fórmula del cuadrado
   $$(2-i)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

3. Calcula $\overline{3-i}/(1+i)$ y expresa el resultado en forma binómica. Multiplicamos el denominador por su conjugado
   $$\overline{3-i}/(1+i) = \frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{3-3i+i-i^2}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

4. Calcula $\dfrac{1}{1+i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Multiplicamos por el conjugado del denominador
   $$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

5. Calcula $\sqrt{i}$ y escribe los resultados en forma binómica.

   Solución: Escribimos en notación exponencial $i = 1 \cdot e^{\pi i/2}$. Entonces las dos raíces son
   $$\sqrt{i} = \begin{cases} \sqrt{1} \cdot e^{\pi i/4} = 1 \cdot (\cos(\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(\pi/4)) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i \\[2ex] \sqrt{1} \cdot e^{\pi i/4 + \pi i} = 1 \cdot (\cos(5\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(5\pi/4)) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i \end{cases}$$

6. Expresa $\dfrac{1_{\pi/4} 2_{\pi/12}}{3_{\pi/6}} = \dfrac{1\,e^{i\pi/4} \cdot 2\,e^{i\pi/12}}{3\,e^{i\pi/6}}$ en forma binómica.

   Solución: Primero simplificamos en notación exponencial
   $$\frac{1\,e^{i\pi/4} \cdot 2\,e^{i\pi/12}}{3\,e^{i\pi/6}} = (2/3) \cdot e^{(1/4+1/12-1/6)\pi i} = (2/3) \cdot e^{\pi i/6}$$

   Por último escribimos en forma binómica
   $$(2/3) \cdot e^{\pi i/6} = (2/3) \cdot (\cos(\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(\pi/6)) = (2/3) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i$$

7. Calcula el argumento de $-1+\sqrt{3}i$ y expresa el resultado en radianes.

   Solución: A la hora de considerar el *arcotangente*, tenemos que tener en cuenta que el número complejo está en el segundo cuadrante.

$$\begin{aligned} \arg\left(-1+\sqrt{3}i\right) &= \arctan\left(\frac{\text{Im }\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{\text{Re }\left(-1+\sqrt{3}i\right)}\right)+\pi = \\ &= \arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\pi = -\pi/3+\pi = \\ &= 2\pi/3 \end{aligned}$$

8. Expresa $-\sqrt{3}-i$ en forma polar o exponencial con el argumento en radianes.

   Solución: Nuevamente hemos de tener en cuenta en el *arcotangente* que el número complejo se encuentra en el tercer cuadrante.

$$\begin{aligned} \arg\left(-\sqrt{3}-i\right) &= \arctan\left(1/\sqrt{3}\right)+\pi = \pi/6+\pi = 7\pi/6 \\ \left|-\sqrt{3}-i\right| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = 2 \end{aligned}$$

   Por lo tanto el resultado buscado es $-\sqrt{3}-i = 2\cdot e^{7\pi i/6}$.

9. Expresa i^{111} en forma polar o exponencial con el argumento en radianes.

   Solución: Simplificamos la potencia

$$i^{111} = i^{110}\cdot i = \left(i^2\right)^{55} i = (-1)^{55} i = -i = 1\cdot e^{3\pi i/2}$$

10. Expresa $(2-2i)\cdot(-5+5\sqrt{3}i)$ en forma polar o exponencial con el argumento en radianes.

    Solución: Escribimos en forma exponencial antes de multiplicar, teniendo en cuenta a la hora de aplicar el *arcotangente* que el segundo factor está en el segundo cuadrante.

$$\begin{aligned} |2-2i| &= \sqrt{2^2+(-2^2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \arg(2-2i) &= \arctan(-1) = -\pi/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|-5+5\sqrt{3}i\right| &= \sqrt{(-5)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100} = 10 \\ \arg\left(-5+5\sqrt{3}i\right) &= \arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\pi = -\pi/3+\pi = 2\pi/3 \end{aligned}$$

    Entonces

$$(2-2i)\cdot(-5+5\sqrt{3}i) = 2\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\cdot 10e^{2\pi/3} = 20\sqrt{2}e^{5\pi i/12}$$

Examen de problemas, 13 de septiembre de 2007

1. **(1 punto)** Calcula los ceros del coseno hiperbólico

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Solución: Tenemos que resolver

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \longrightarrow e^z = -e^{-z} \longrightarrow e^z/e^{-z} = -1 \longrightarrow e^{2z} = -1 = e^{\pi i}$$

Tomamos un logaritmo complejo, y deducimos que $2z = \pi i + 2k\pi i$. Por tanto la solución buscada es $z = (1/2 + k)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. **(1 punto)** Se considera la función $u(x, y) = 2xy$. Encuentra las funciones $v(x, y)$ que satisfagan que $u + i \cdot v$ es holomorfa.

Solución: En primer lugar comprobamos que $u(x, y)$ es armónica.

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2y & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

Entonces $u(x, y)$ es armónica, y tiene sentido aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2x \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2y$$

De la primera ecuación deducimos que

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\, dx = \int -2x\, dx = -x^2 + \phi(y)$$

Aplicamos la segunda ecuación para deducir $\phi(y)$.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(-x^2 + \phi(y))}{\partial y} = \phi'(y) \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi'(y) = 2y \Longrightarrow \phi(y) = y^2 + C$$

Por lo tanto $v(x, y) = -x^2 + y^2 + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Nota: No es complicado identificar a u y v como las partes real e imaginaria de la función holomorfa $f(z) = -iz^2 + C$.

3. Calcula las siguientes integrales en función del valor de $r > 0$:

   a) **(1 punto)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,dz$, $\gamma(t) = r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   Solución: Descomponemos el denominador para hallar las singularidades

$$z^3 + z = z(z^2+1) = z(z-i)(z+i)$$

   Así pues tenemos tres polos simples $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$. Calculamos los correspondientes residuos

$$g_1(z) = z \cdot f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} \Longrightarrow \text{Res}\,(f, 0) = g_1(0) = 1$$

$$g_2(z) = (z-i) \cdot f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)} \Longrightarrow \text{Res}\,(f, i) = g_2(i) = -e^{-1}/2$$

$$g_3(z) = (z+i) \cdot f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-i)} \Longrightarrow \text{Res}\,(f, -i) = g_3(-i) = -e/2$$

   Queremos aplicar el teorema de los residuos, para lo que necesitamos distinguir cuándo las singularidades están dentro de la curva. Como la primera singularidad $z_1 = 0$ coincide con el centro de la circunferencia $z_0 = 0$, está dentro de la curva para cualquier radio $r > 0$. Para las otras dos se obtienen las distancias $|z_2 - z_0| = |i - 0| = 1$, $|z_3 - z_0| = |-i-0| = 1$. Así pues, si $r < 1$ sólo $z_1 = 0$ está dentro de la curva, pero si $r > 1$ estarían en el interior las tres singularidades. Entonces

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,dz = \begin{cases} 2\pi\,i & \text{si } r < 1 \\ 2\pi\,i \cdot (1 - e^{-1}/2 - e/2) & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

   b) **(1 punto)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+i}{(z-i)^2}\,dz$, $\gamma(t) = r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   Solución: Tenemos una única singularidad $z = i$, que es un polo doble. Construimos

$$g(z) = (z-i)^2 \cdot f(z) = (z-i)^2 \cdot \frac{z+i}{(z-i)^2} = z + i$$

   Como $g'(z) = 1$, entonces $\text{Res}\,(f, i) = g'(i)/1! = 1$. Hay que distinguir casos, en función de si la singularidad está dentro o fuera de la circunferencia. Como la distancia del centro de la circunferencia a la singularidad es $|0 - i| = 1$, aplicando el teorema de los residuos deducimos que

$$\int_\gamma \frac{z+i}{(z-i)^2}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ 2\pi\,i & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

c) **(1 punto)** $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{sen}(1/z)\, dz$, $\gamma(t) = i + r\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución: Tenemos una única singularidad $z = 0$, que es de tipo esencial. Construimos la serie de Laurent

$$\operatorname{sen}(1/z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} + \dots$$

El residuo de la función es claramente $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$. Hay que tener en cuenta si la singularidad está dentro de la curva, lo cual ocurre si $r > |i - 0| = 1$. Así pues

$$\int_\gamma \operatorname{sen}(1/z)\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ 2\pi\, i & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

d) **(1 punto)** $\displaystyle\int_\gamma (\overline{z} + |z|)\, dz$, $\gamma(t) = r\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución: La función no es holomorfa, así que hemos de aplicar directamente la definición.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\overline{r\, e^{it}} + \left|r\, e^{it}\right|\right) \cdot ir\, e^{it}\, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(r\, e^{-it} + r\right) \cdot ir\, e^{it}\, dt = ir^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + e^{it}\right)\, dt = \\
&= ir^2 \left[t - \frac{e^{it}}{i}\right]_{t=0}^{2\pi} = ir^2 \left(2\pi - \frac{e^{2\pi\, i}}{i} - 0 + \frac{e^0}{i}\right) = \\
&= 2\pi\, i\, r^2
\end{aligned}$$

4. **(1 punto)** Calcula en el anillo $A(0, 1, 3)$ la serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{z - i}{(z-1)\,(z+3i)}$$

Solución: Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{z - i}{(z-1)\,(z+3i)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3i} = \frac{A(z+3i) + B(z-1)}{(z-1)\,(z+3i)} = \frac{(A+B)z + 3Ai - B}{(z-1)\,(z+3i)}$$

El sistema queda

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 3Ai - B &= -i \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones despejamos

$$(1+3i)A = 1 - i \Longleftrightarrow A = \frac{1-i}{1+3i} = \frac{(1-i)(1-3i)}{1^2 + 3^2} = \frac{-2-4i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Despejamos la otra constante

$$B = 1 - A = 1 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$$

Ahora desarrollamos las series

$$\frac{A}{z-1} = \frac{A}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \frac{A}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1/5 - 2/5i}{z^{n+1}} \text{ si } |z| > 1$$

$$\frac{B}{z+3i} = \frac{B}{3i} \cdot \frac{1}{1 - z/(-3i)} = \frac{B}{3i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{-3i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6+2i)z^n}{15i(-3i)^n} \text{ si } |z| < 3$$

Ambas series son válidas en el anillo $1 < |z| < 3$, por lo tanto la serie buscada es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1/5 - 2/5i}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6+2i)z^n}{15i(-3i)^n} \text{ si } z \in A(0,1,3)$$

5. Resuelve los siguientes apartados

   a) **(1 punto)** Calcula la transformada de Laplace de $f(t) = t^2 \operatorname{sen}(2t)$.

   Solución: Podemos aplicar dos veces la fórmula de derivación

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)](z) = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f(t)](z)$$

   lo que nos llevaría a

$$\mathcal{L}[t^2 \cdot f(t)](z) = (-1)^2 \frac{d^2}{dz^2}\mathcal{L}[f(t)](z)$$

   Tomando $f(t) = \operatorname{sen}(2t)$ se tendría que

$$\mathcal{L}[t^2 \operatorname{sen}(2t)](z) = \frac{d^2}{dz^2}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](z) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{2}{z^2+2^2}\right)$$

   Si tomamos $g(z) = 2/(z^2+4)$, entonces

$$g'(z) = \frac{-4z}{(z^2+4)^2}, \qquad g''(z) = \frac{-4(z^2+4)^2 + 4z \cdot 2(z^2+4)2z}{(z^2+4)^4} = \frac{12z^2 - 16}{(z^2+4)^3}$$

   Por lo tanto la solución buscada es

$$\mathcal{L}[t^2 \operatorname{sen}(2t)](z) = \frac{12z^2 - 16}{(z^2+4)^3}$$

   Nota: También se podía haber aplicado la definición de transformada de Laplace, descompuesto el seno en exponenciales complejas, y haber integrado cada sumando aplicando dos veces partes.

b) **(2 puntos)** Resuelve mediante transformadas de Laplace la ecuación diferencial

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = g(t)$$

junto con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, siendo

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 3y' + 2y] &= z^2\mathcal{L}[y] - z \cdot y(0) - y'(0) + 3(z\mathcal{L}[y] - y(0)) + 2\mathcal{L}[y] = \\ &= (z^2 + 3z + 2)\mathcal{L}[y] - 2z + 1 - 6 = \\ &= (z^2 + 3z + 2)\mathcal{L}[y] - 2z - 5 \end{aligned}$$

Para el término independiente se puede aplicar el segundo teorema de traslación, o integrar directamente

$$\mathcal{L}[g] = \int_0^1 e^{-zt}\,dt = \left.\frac{e^{-zt}}{-z}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1 - e^{-z}}{z}$$

Igualando términos deducimos que

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2z^2 + 5z + 1 - e^{-z}}{z(z^2 + 3z + 2)} = \frac{2z^2 + 5z + 1 - e^{-z}}{z(z+1)(z+2)} = f(z)$$

Tenemos como singularidades simples $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = -2$. En el numerador aparecer una exponencial, que proviene de que el término independiente está definido por trozos. Entonces separamos en dos partes

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{2z^2 + 5z + 1}{z(z+1)(z+2)} \\ f_2(z) &= \frac{-1}{z(z+1)(z+2)} \\ f(z) &= f_1(z) + e^{-z} f_2(z) \end{aligned}$$

Buscamos la transformada inversa de cada uno de los sumandos. Empezamos por la parte que no lleva la exponencial e^{-z}.

$$\begin{aligned} \text{Res}\,(e^{zt} f_1(z), 0) &= \frac{2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 1}{(0+1)(0+2)} e^{0 \cdot t} = \frac{1}{2} \\ \text{Res}\,(e^{zt} f_1(z), -1) &= \frac{2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 1}{(-1)(-1+2)} e^{-1 \cdot t} = 2e^{-t} \\ \text{Res}\,(e^{zt} f_1(z), -2) &= \frac{2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 1}{(-2)(-2+1)} e^{-2 \cdot t} = -\frac{1}{2} e^{-2t} \end{aligned}$$

Encontramos entonces una parte de la solución buscada

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[f_1(z)] = 1/2 + 2e^{-t} - e^{-2t}/2$$

Para calcular la otra parte, comenzamos calculando los residuos sin tener en cuenta la exponencial e^{-z}

$$\begin{aligned}
\text{Res } (e^{zt} f_2(z), 0) &= \frac{-1}{(0+1)(0+2)} e^{0 \cdot t} = -\frac{1}{2} \\
\text{Res } (e^{zt} f_2(z), -1) &= \frac{-1}{(-1)(-1+2)} e^{-1 \cdot t} = e^{-t} \\
\text{Res } (e^{zt} f_2(z), -2) &= \frac{-1}{(-2)(-2+1)} e^{-2 \cdot t} = -\frac{1}{2} e^{-2t}
\end{aligned}$$

De aquí deducimos fácilmente que

$$\mathcal{L}^{-1}[f_2(z)] = -1/2 + e^{-t} - e^{-2t}/2$$

Aplicando el segundo teorema de traslación,

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[e^{-z} f_2(z)](t) = \mathcal{L}^{-1}[f_2(z)](t-1) \cdot h_1(t) = \\
&= (-1/2 + e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}/2) \cdot h_1(t) = \\
&= (-1/2 + e \cdot e^{-t} - e^2\, e^{-2t}/2) \cdot h_1(t) = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1] \\ -1/2 + e \cdot e^{-t} - e^2\, e^{-2t}/2 & \text{si } t > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Sumando las dos componentes calculamos la solución buscada

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} 1/2 + 2e^{-t} - e^{-2t}/2 & \text{si } t \in [0,1] \\ (2+e) \cdot e^{-t} - (1+e^2)\, e^{-2t}/2 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$