Examen de operaciones básicas, 25 de junio de 2007

1. Calcula $(-2-7i)\cdot(5-3i)$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Multiplicando

$$\begin{aligned}(-2-7i)\cdot(5-3i) &= -2\cdot 5-2\cdot(-3i)-7i\cdot 5-7i\cdot(-3i)=\\ &= -10+6i-35i-21=-31-29i\end{aligned}$$

2. Calcula $(-1+i)^3$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Podíamos escribir la base en forma exponencial, pero también es sencillo usar el binomio de Newton

$$\begin{aligned}(-1+i)^3 &= \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}(-1)^3\cdot i^0+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}(-1)^2\cdot i^1+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}(-1)^1\cdot i^2++\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}(-1)^0\cdot i^3=\\ &= -1+3i+3-i=2+2i\end{aligned}$$

3. Calcula $\overline{(3-i)\cdot(2+i)}/(1+i)$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Podemos conjugar antes o después de multiplicar, porque $\overline{z\cdot\omega}=\overline{z}\cdot\overline{\omega}$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{(3-i)\cdot(2+i)}}{(1+i)} &= \frac{(3+i)\cdot(2-i)}{(1+i)}=\frac{(6-3i+2i+1)}{(1+i)}=\frac{(7-i)}{(1+i)}=\frac{(7-i)\,(1-i)}{(1+i)\,(1-i)}=\\ &= \frac{(7-7i-i-1)}{2}=\frac{6-8i}{2}=3-4i\end{aligned}$$

4. Calcula $\dfrac{(1-i)}{(2+3i)\,(2-i)}$ y expresa el resultado en forma binómica.

   Solución: Realizamos en primer lugar el producto del denominador

$$\frac{(1-i)}{(2+3i)\,(2-i)} = \frac{1-i}{4-2i+6i-3i^2}=\frac{1-i}{4-2i+6i+3}=\frac{1-i}{7+4i}$$

   y ahora multiplicamos por el conjugado del denominador

$$\frac{(1-i)\,(7-4i)}{(7+4i)\,(7-4i)}=\frac{7-4i-7i+4i^2}{7^2+4^2}=\frac{3}{65}-\frac{11}{65}\cdot i$$

5. Calcula el módulo de $\dfrac{\left(-2+i\sqrt{5}\right)}{-4+3i}$.

Solución: Aprovechamos que $|z/\omega| = |z|/|\omega|$.

$$\left|\frac{-2+i\sqrt{5}}{-4+3i}\right| = \frac{\left|-2+i\sqrt{5}\right|}{|-4+3i|} = \frac{\sqrt{(-2)^2+\sqrt{5}^2}}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{\sqrt{4+5}}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5}$$

6. Calcula $\sqrt[4]{-i}$ y escribe los resultados en polar o exponencial.

Solución: Escribimos el radicando $-i = 1 \cdot e^{i \cdot 3\pi/2}$ en forma exponencial.

$$\sqrt[4]{-i} = \begin{cases} \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot 3\pi/4} = e^{i\cdot 3\pi/8} = \cos\frac{3\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8} \\ \\ \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot(3\pi/2+2\pi)/4} = e^{i\cdot 7\pi/8} = \cos\frac{7\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8} \\ \\ \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot(3\pi/2+4\pi)/4} = e^{i\cdot 11\pi/8} = \cos\frac{11\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{8} \\ \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot(3\pi/2+6\pi)/4} = e^{i\cdot 15\pi/8} = \cos\frac{15\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{15\pi}{8} \end{cases}$$

7. Expresa $\sqrt{3} - i$ en forma polar o exponencial, expresando el ángulo en radianes.

Solución: Calculamos módulo y argumento, teniendo en cuenta que el número complejo pertenece al primer cuadrante

$$\left|\sqrt{3}-i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 +} = \sqrt{4} = 2, \quad \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

Por tanto $\sqrt{3} - i = 2_{-\pi/6} = 2e^{-i\cdot\pi/6}$. También se admitiría como válido el argumneto $2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$.

8. Expresa $\dfrac{2i^{83} - i^{26}}{3i^{61} + i^{46}}$ en forma binómica.

Solución: Vamos a simplificar las potencias

$$\begin{aligned} i^{83} &= i^{20*4+3} = i^3 = -i \\ \\ i^{26} &= i^{4*6+2} = i^2 = -1 \\ \\ i^{61} &= (i)^{4*15+1} = i^1 = i \\ \\ i^{46} &= i^{4*11+2} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

Entonces, simplificando y utilizando el conjugado del denominador,

$$\begin{aligned}\frac{2i^{83}-i^{26}}{3i^{61}+i^{46}} &= \frac{2\,(-i)-(-1)}{3\,(i)+(-1)}=\frac{1-2i}{-1+3i}=\frac{(1-2i)\,(-1-3i)}{(-1+3i)\,(-1-3i)}=\frac{-1-3i+2i+6i^2}{1+3^2}=\\ &= -\frac{7}{10}-i\frac{1}{10}\end{aligned}$$

9. Expresa $\dfrac{2-2i}{-5+5\sqrt{3}i}$ en forma polar o exponencial, expresando el ángulo en radianes.

   Solución: Calculamos módulo y argumento de numerador y denominador

   $$|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},\quad \arg(2-2i)=\arctan\frac{-2}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

   $$\left|-5+5\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-5)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{25+75}=10,\quad \arg\left(-5+5\sqrt{3}i\right)=\arctan\frac{5\sqrt{3}}{-5}=\frac{2\pi}{3}$$

   En el denominador hemos tenido en cuenta que pertenece al cuarto cuadrante para calcular su argumento. Finalmente se obtiene

   $$\frac{2-2i}{-5+5\sqrt{3}i}=\frac{2\sqrt{2}e^{-i\cdot\pi/4}}{10e^{i2\pi/3}}=\frac{\sqrt{2}}{5}e^{-i\cdot\pi/4-i\cdot 2\pi/3)}=\frac{\sqrt{2}}{5}e^{-i\cdot 11\pi/12}=\frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\cdot 13\pi/12}$$

10. Expresa $\dfrac{9_{\pi/4}\cdot 8_{\pi/12}}{6_{\pi/3}}=\dfrac{9e^{i\cdot\pi/4}\cdot 8e^{i\cdot\pi/12}}{6e^{i\cdot\pi/3}}$ en forma binómica.

    Solución: Operamos

    $$\frac{9e^{i\cdot\pi/4}\cdot 8e^{i\cdot\pi/12}}{6e^{i\cdot\pi/3}}=\left(\frac{9\cdot 8}{6}\right)e^{i\cdot\pi/4+i\cdot\pi/12-i\cdot\pi/3}=12e^{i0}=12=12+i0$$

Examen de problemas, 25 de junio de 2007

1. Encuentra el conjunto de puntos en el cual es holomorfa la función compleja:

   $$f(x+iy)=2xy+i\left(x+\frac{2}{3}y^3\right)$$

   Solución: Tenemos que estudiar en qué puntos se cumplen las ecuaciones de Cauhy-Riemann. En este caso

   $$u(x,y)=2xy$$

   $$v(x,y)=x+\tfrac{2}{3}y^3$$

Por tanto si calculamos las derivadas parciales de u y v respecto de x e y, obtendremos

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \Leftrightarrow 2y = 2y^2 \\ u_y &= -v_x \Leftrightarrow 2x = -1 \end{aligned}$$

De la primera ecuación

$$2y = 2y^2 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{o} \quad y = 1$$

mientras que de la segunda

$$x = -\frac{1}{2}$$

por tanto tendremos solamente dos complejos donde la función $f(x, y)$ sea holomorfa

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{2} + 0i = -\frac{1}{2} \\ z_2 &= -\frac{1}{2} + i1 = -\frac{1}{2} + i \end{aligned}$$

2. **(2 puntos)** Calcula para $a > 1$ la siguiente integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{a + \cos t} dt$$

Solución: Transformaremos en primer lugar la integral real anterior en una integral compleja a lo largo de circunferencia unidad, para ello realizamos el cambio $e^{it} = z$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

con este cambio

$$dt = \frac{1}{iz} dz$$

y la integral real puede expresarse como

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{a + \cos t} dt = \int_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{a + \frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} dz = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{2az + z^2 + 1} \frac{1}{iz} dt$$

siendo γ la circunferencia de centro 0 y radio 1. Según el teorema de los residuos y puesto que la función del integrando solamente tiene singularidades aisladas, ya que es una función racional:

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 1}{2az + z^2 + 1} \frac{1}{iz} dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathring{\gamma}} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

siendo

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{2az + z^2 + 1} \frac{1}{iz}$$

Las singularidades de $f(z)$ son los complejos que anulan el denominador.

$$\left(2az+z^2+1\right)z=0\Leftrightarrow\begin{cases} z_0=0 \\ \\ z^2+2az+1=0\end{cases}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} z^2+2az+1 &= 0\Leftrightarrow z=\frac{-2a\pm\sqrt{(2a)^2-4}}{2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4\left(a^2-1\right)}}{2} \\ &= \frac{-2a\pm 2\sqrt{(a^2-1)}}{2}=-a\pm\sqrt{(a^2-1)} \end{aligned}$$

luego tenemos dos singularidades más

$$\begin{aligned} z_1 &= -a+\sqrt{(a^2-1)} \\ z_2 &= -a-\sqrt{(a^2-1)} \end{aligned}$$

De estas tres singularidades tendremos que tener en cuenta aquellas que estén dentro de la circunferencia unidad, mientras que $z_0=0$ está claramente dentro de la curva, para encontrar si z_1 o z_2 o ambas están dentro de la circunferencia unidad, tenemos en cuenta que una es conjugada de la otra y que además

$$z_1z_2=\left(-a+\sqrt{(a^2-1)}\right)\left(-a-\sqrt{(a^2-1)}\right)=(-a)^2-\left(\sqrt{(a^2-1)}\right)^2=a^2-\left(a^2-1\right)=1$$

por tanto

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|=1\Rightarrow|z_1|=\frac{1}{|z_2|}$$

además está claro que

$$\left|-a-\sqrt{(a^2-1)}\right|=a+\sqrt{a^2-1}$$

y como

$$a>1\Rightarrow a^2-1>0\Rightarrow\sqrt{a^2-1}>0$$

de donde

$$|z_2|=\left|-a-\sqrt{(a^2-1)}\right|=a+\sqrt{a^2-1}>a>1$$

luego z_2 no está dentro de la circunferencia unidad y tomando inversos

$$|z_2|>1\Rightarrow\frac{1}{|z_2|}<1$$

pero como $|z_1|=\frac{1}{|z_2|}$ entonces

$$|z_1|<1$$

y z_1 sí está dentro de la circunferencia unidad.

Hay otra forma de comprobar que z_1 está en el interior de la curva γ. Teniendo en cuenta que $a > 1$, entonces

$$a^2 > a^2 - 1 > 0$$

y tomando raíces

$$a > \sqrt{a^2 - 1}$$

luego

$$0 > -a + \sqrt{a^2 - 1}$$

y su valor absoluto cumple (por definición de valor absoluto)

$$\left| -a + \sqrt{(a^2 - 1)} \right| = a - \sqrt{(a^2 - 1)}$$

para comprobar que este resultado es menor que la unidad

$$a - \sqrt{(a^2 - 1)} < 1 \Leftrightarrow a - 1 < \sqrt{(a^2 - 1)}$$

y tomando cuadrados

$$(a-1)^2 < \left(\sqrt{(a^2 - 1)}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 < a^2 - 1 \Leftrightarrow -2a + 1 < -1 \Leftrightarrow 2 < 2a \Leftrightarrow 1 < a$$

lo cual es cierto.

Luego

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 1}{2az + z^2 + 1} \frac{1}{iz} \, dz = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{i(z - z_1)(z - z_2)z} \, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), z_1)\right)$$

Calculamos a continuación ambos residuos. En primer lugar para $z_0 = 0$

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 + 1}{i(z - z_1)(z - z_2)z}, 0\right) = \phi_1(0)$$

siendo

$$\phi_1(z) = \frac{z^2 + 1}{i(z - z_1)(z - z_2)} \Rightarrow \phi_1(0) = \frac{1}{i(-z_1)(-z_2)} = \frac{1}{iz_1 z_2} = \frac{1}{i}$$

donde se ha tenido en cuenta que $z_1 z_2 = 1$.

Después calculamos el residuo para z_1

$$\operatorname{Res}(f(z), z) = \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 + 1}{i(z - z_1)(z - z_2)z}, z_1\right) = \phi_2(z_1)$$

siendo

$$\phi_2(z) = \frac{z^2 + 1}{iz(z - z_2)} \Rightarrow \phi_1(0) = \frac{z_1^2 + 1}{i(z_1^2 - z_1 z_2)} = \frac{1}{i} \frac{z_1^2 + 1}{z_1^2 - 1}$$

donde de nuevo tenemos en cuenta que $z_1 z_2 = 1$. La integral buscada es entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z^2 + 1}{i(z - z_1)(z - z_2)z} \, dz &= 2\pi i \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i} \frac{z_1^2 + 1}{z_1^2 - 1}\right) \\
&= 2\pi \left(1 + \frac{z_1^2 + 1}{z_1^2 - 1}\right) = 2\pi \left(\frac{2z_1^2}{z_1^2 - 1}\right) = 4\pi \left(\frac{z_1^2}{z_1^2 - 1}\right)
\end{aligned}$$

o en términos de a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{a+\cos t}\,dt = 4\pi \frac{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)^2}{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)^2-1}$$

Sin embargo es factible realizar una simplificación mayor

$$\begin{aligned} 4\pi\left(\frac{z_1^2}{z_1^2-1}\right) &= 4\pi\left(\frac{z_1^2}{z_1^2-z_1z_2}\right) = 4\pi\frac{z_1}{z_1-z_2} = \\ &= 4\pi\frac{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)}{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)} = 4\pi\frac{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)}{2\sqrt{a^2-1}} \end{aligned}$$

y la integral sería

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{a+\cos t}\,dt = 2\pi\frac{\sqrt{a^2-1}-a}{\sqrt{a^2-1}} = 2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$$

3. Calcula las siguientes integrales en función del valor de $r > 0$:

   (a) **(1 punto)** $\int_\gamma \frac{e^z}{\pi i - 2z}\,dz$, $\gamma(t) = r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   Solución: Puesto que la función del integrando solamente tiene singularidades aisladas podemos utilizar el teorema de los residuos para el cáclulo de esta integral. El residuo de la función del integrando son los ceros del denominador, luego

$$\pi i - 2z = 0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{\pi}{2}i$$

   que es un polo simple y el residuo de la función en $z_0 = \frac{\pi}{2}i$, es

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)f(z) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)\frac{e^z}{\pi i-2z} \\ &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)\frac{e^z}{-2\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\frac{e^z}{-2} = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2} = -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

   Sin embargo, el valor de la integral dependerá del radio de la circunferencia. Teniendo en cuenta que $\left|\frac{\pi}{2}i\right| = \frac{\pi}{2}$, obtenemos:

   i. Si $r < \frac{\pi}{2}$, entonces la curva no contiene a la singularidad y por tanto

$$\int_\gamma \frac{e^z}{\pi i-2z}\,dz = 0$$

   ii. Si $r > \frac{\pi}{2}$, entonces la curva contiene a la singularidad z_0 y por tanto

$$\int_\gamma \frac{e^z}{\pi i-2z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{\pi i-2z},\frac{\pi}{2}i\right) = 2\pi i\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi$$

iii. Si $r = \pi/2$, entonces la curva pasa por la singularidad y la integral no puede calcularse.

(b) **(1 punto)** $\int_\gamma \frac{z}{(z-i)^2}\,dz$, $\gamma(t) = 1 + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
Solución: Puesto que la función del integrando solamente tiene singularidades aisladas podemos utilizar el teorema de los residuos para el cáclulo de esta integral. El residuo de la función del integrando son los ceros del denominador, luego

$$(z-i)^2 = 0 \Leftrightarrow z_0 = i$$

que es un polo doble y el residuo de la función en $z_0 = i$, es

$$\text{Res}\left(\frac{z}{(z-i)^2}, i\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2\,\frac{z}{(z-i)^2}\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\,(z) = \lim_{z\to i} 1 = 1$$

Sin embargo, el valor de la integral dependerá del radio de la circunferencia. Teniendo en cuenta que la distancia entre el centro de la curva (1) y la singularidad es $|1-i| = \sqrt{2}$, obtenemos:

i. Si $r < \sqrt{2}$, entonces la curva no contiene a la singularidad y por tanto

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-i)^2}\,dz = 0$$

ii. Si $r > \sqrt{2}$, entonces la curva contiene a la singularidad z_0 y por tanto

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\,\text{Res}\,\text{Res}\left(\frac{z}{(z-i)^2}, i\right) = 2\pi i\,(1) = 2\pi i$$

iii. Si $r = \sqrt{2}$, entonces la curva pasa por la singularidad y la integral no puede calcularse.

4. Se considera la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z-2i)(z-4i)}$$

(a) (0.5 puntos) Realiza la descomposición en fracciones simples de $f(z)$.

Solución: Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{z}{(z-i)(z-2i)(z-4i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z-4i} =$$

$$= \frac{A(z-2i)(z-4i) + B(z-i)(z-4i) + C(z-i)(z-2i)}{(z-i)(z-2i)(z-4i)} =$$

Los denominadores deben coincidir

$$A(z-2i)(z-4i) + B(z-i)(z-4i) + C(z-i)(z-2i) = z$$

Teniendo en cuenta que las raíces son simples, podemos obtener los coeficientes buscados, sustituyendo cada una de ellas

$$z = i \Rightarrow A(i-2i)(i-4i) = i \Rightarrow -3A = i \Rightarrow A = -\frac{1}{3}i$$

$$z = 2i \Rightarrow B(2i-i)(2i-4i) = 2i \Rightarrow 2B = 2i \Rightarrow B = i$$

$$z = 4i \Rightarrow C(4i-i)(4i-2i) = 4i \Rightarrow -6C = 4i \Rightarrow C = -\frac{2}{3}i$$

La solución es $A = -\frac{1}{3}i$, $B = i$, $C = -\frac{2}{3}i$, y por lo tanto

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z-2i)(z-4i)} = -\frac{i}{3(z-i)} + \frac{i}{(z-2i)} - \frac{2i}{3(z-4i)}$$

(b) (0.75 puntos) Construye la serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ válida para $|z| < 1$.

Solución: Desarrollamos en serie ahora cada uno de los tres sumandos. Puesto que

$$-\frac{i}{3\,(z-i)} = \frac{i}{3}\frac{1}{i-z} = \frac{i}{3}\frac{1}{i\,(1-z/i)} = \frac{1}{3}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n \text{ si } \quad \left|\frac{z}{i}\right| < 1$$

$$\frac{i}{z-2i} = -i \cdot \frac{1}{2i-z} = -\frac{i}{2i}\frac{1}{(1-z/2i)} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n \text{ si } |\frac{z}{2i}| < 1$$

$$-\frac{2i}{3\,(z-4i)} = \frac{2i}{3} \cdot \frac{1}{4i-z} = \frac{2i}{3}\frac{1}{4i\,(1-z/4i)} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4i}\right)^n \text{ si } \quad |\frac{z}{4i}| < 1$$

Los desarrollos anteriores son válidos cuando

$$\left|\frac{z}{i}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|i|} = |z| < 1$$

$$\left|\frac{z}{2i}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|2i|} = \frac{|z|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$$

$$\left|\frac{z}{4i}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|4i|} = \frac{|z|}{4} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$$

y para $|z| < 1$, está claro que los tres desarrollos son válidos

$$|z| < 1 < 2 < 4$$

La serie buscada es la suma de las tres anteriores

$$f(z) \quad = \quad \frac{3z}{(z-i)(z-2i)(z-4i)} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3i^n} - \frac{1}{2\cdot(2i)^n} + \frac{1}{6\cdot(4i)^n}\right) z^n$$

(c) (0.75 puntos) Construye la serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$ válida para $|z| > 4$.

Solución: Procedemos de forma análoga, aunque buscamos las series con potencias negativas de z, puesto que en este caso

$$|z| > 4 > 2 > 1$$

$$-\frac{i}{3(z-i)} = -\frac{i}{3z}\frac{1}{1-i/z} = -\frac{i}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n \quad si \quad \left|\frac{i}{z}\right| < 1$$

$$\frac{i}{z-2i} = \frac{i}{z}\frac{1}{1-2i/z} = \frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n \quad si \quad \left|\frac{2i}{z}\right| < 1$$

$$-\frac{2i}{3(z-4i)} = -\frac{2i}{3z}\frac{1}{1-4i/z} = -\frac{2i}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4i}{z}\right)^n \quad si \quad \left|\frac{4i}{z}\right| < 1$$

Los desarrollos anteiores son válidos cuando

$$\left|\frac{i}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|i|}{|z|} = \frac{1}{|z|} < 1 \Leftrightarrow 1 < |z|$$

$$\left|\frac{2i}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|2i|}{|z|} = \frac{2}{|z|} < 1 \Leftrightarrow 2 < |z|$$

$$\left|\frac{4i}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|4i|}{|z|} = \frac{4}{|z|} < 1 \Leftrightarrow 4 < |z|$$

y para $|z| > 4$, está claro que los tres desarrollos son válidos. La serie buscada es la suma de las tres anteriores

$$f(z) = \frac{3z}{(z-i)(z-2i)(z-4i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3} + 2^n - \frac{4^{n+1}}{6}\right)\frac{i^{n+1}}{z^{n+1}}$$

Resuelve los siguientes apartados

(a) **(1 punto)** Calcula para $\alpha \in \mathbb{R}$ la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha t) & t \in [0, \pi] \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

Solución: Utilizamos la definición de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-zt} dt$$

teniendo en cuenta que $f(t)$ es 0, para $t > \pi$, la integral queda como

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\alpha t)\, e^{-zt} dt$$

teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}(\alpha t) = \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i}$$

la integral queda

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](z) &= \int_0^\pi \left(\frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i}\right) e^{-zt} dt = \frac{1}{2i}\left(\int_0^\pi e^{i\alpha t} e^{-zt} dt - \int_0^\pi e^{-i\alpha t} e^{-zt} dt\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_0^\pi e^{(i\alpha - z)t} dt - \int_0^\pi e^{-(i\alpha + z)t} dt\right)
\end{aligned}$$

ambas integrales son inmediatas, si $z \neq ia$ y $z \neq -ia$

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1}{2i} \frac{1}{i\alpha - z} e^{(i\alpha - z)t} + \frac{1}{i\alpha + z} e^{-(i\alpha + z)t} \Big|_{t=0}^{t=\pi}$$

y evaluando en 0 y π

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](z) &= \frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{1}{i\alpha - z} e^{(i\alpha - z)\pi} + \frac{1}{i\alpha + z} e^{-(i\alpha + z)\pi}\right) - \left(\frac{1}{i\alpha - z} + \frac{1}{i\alpha + z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{1}{i\alpha - z} e^{(i\alpha - z)\pi} + \frac{1}{i\alpha + z} e^{-(i\alpha + z)\pi}\right) + \left(\frac{2i\alpha}{\alpha^2 + z^2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{1}{i\alpha - z} e^{(i\alpha - z)\pi} + \frac{1}{i\alpha + z} e^{-(i\alpha + z)\pi}\right)\right\} + \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}\right) \\
&= \frac{1}{2i} \frac{(i\alpha + z) e^{i\alpha\pi} e^{-z\pi} + (i\alpha - z) e^{-i\alpha\pi} e^{-z\pi}}{(i\alpha - z)(i\alpha + z)} + \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}\right) \\
&= \frac{1}{2i} \frac{i\alpha \left(e^{i\alpha\pi} + e^{-i\alpha\pi}\right) e^{-z\pi} + z\left(e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}\right) e^{-z\pi}}{(i\alpha)^2 - z^2} + \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2i} \frac{i\alpha 2 \cos(\alpha\pi) e^{-z\pi} + z 2i \operatorname{sen}(\alpha\pi) e^{-z\pi}}{\alpha^2 + z^2} + \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}\right) - \frac{(\alpha \cos(\alpha\pi) + z \operatorname{sen}(\alpha\pi)) e^{-z\pi}}{\alpha^2 + z^2}
\end{aligned}$$

(b) **(2 puntos)** Resuelve mediante transformadas de Laplace la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y(t) = \operatorname{sen}(\alpha t)$$

junto con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

5. Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación

$$z^2 \mathcal{L}[y] - z \cdot y(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\operatorname{sen} 4t] = \frac{4}{z^2 + 4^2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (z^2 + 4)\mathcal{L}[y] - z + 2 = \frac{4}{z^2 + 16} \longrightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{4}{(z^2 + 16)(z^2 + 4)} + \frac{z - 2}{(z^2 + 4)}$$

Tenemos como singularidades $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 4i$ y $z_4 = -4i$ para la primera fracción (polos simples) y $z_1 = 2i$ y $z_2 = -2i$ para la segunda fracción. Teniendo en cuenta la linealidad de la transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(z^2+16)(z^2+4)} + \frac{z-2}{(z^2+4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(z^2+16)(z^2+4)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z-2}{(z^2+4)}\right)$$

Para la primera inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(z^2+16)(z^2+4)}\right) = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{4}{(z^2+16)(z^2+4)}, z_k\right)$$

La función puede ponerse como

$$F(z) = e^{zt}\frac{4}{(z-2i)(z+2i)(z-4i)(z+4i)}$$

y los residuos son

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(F(z), 2i) &= \frac{4e^{2it}}{(2i+2i)(2i-4i)(2i+4i)} = \frac{1}{12i}e^{2it} \\
\operatorname{Res}(F(z), -2i) &= \frac{4e^{-2it}}{(-2i-2i)(-2i-4i)(-2i+4i)} = -\frac{1}{12i}e^{-2it} \\
\operatorname{Res}(F(z), 4i) &= \frac{4e^{4it}}{(4i-2i)(4i+2i)(4i+4i)} = -\frac{1}{24i}e^{4it} \\
\operatorname{Res}(F(z), -4i) &= \frac{4e^{-4it}}{(-4i-2i)(-4i+2i)(-4i-4i)} = \frac{1}{24i}e^{-4it}
\end{aligned}$$

y sumando todos los residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(z^2+16)(z^2+4)}\right) = \frac{1}{12i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) - \frac{1}{24i}\left(e^{4it} - e^{-4it}\right) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{6} - \frac{\operatorname{sen}(4t)}{12}$$

Para la segunda inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z-2}{(z^2+4)}\right) = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z-2}{(z^2+4)}, z_k\right)$$

La función puede ponerse como

$$e^{zt}\frac{z-2}{(z-2i)(z+2i)}$$

y los residuos son

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z-2}{(z-2i)(z+2i)}, 2i\right) &= \frac{(2i-2)e^{2it}}{(2i+2i)} = \frac{(i-1)}{2i}e^{2it} \\
\operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z-2}{(z-2i)(z+2i)}, -2i\right) &= \frac{(-2i-2)e^{-2it}}{(-2i-2i)} = \frac{i+1}{2i}e^{-2it}
\end{aligned}$$

y sumando todos los residuos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(z^2+16)(z^2+4)}\right) &= \frac{(i-1)}{2i}e^{2it}+\frac{i+1}{2i}e^{-2it}=\frac{i}{2i}\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)-\frac{1}{2i}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\\ &= \cos(2t)-\operatorname{sen}(2t)\end{aligned}$$

luego la función buscada es

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(z^2+16)(z^2+4)}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z-2}{(z^2+4)}\right)=\frac{\operatorname{sen}(2t)}{6}-\frac{\operatorname{sen}(4t)}{12}+\cos(2t)-\operatorname{sen}(2t)$$

o simplificando

$$y(t)=\cos(2t)-\frac{5}{6}\operatorname{sen}(2t)-\frac{1}{12}\operatorname{sen}(4t)$$