Examen de operaciones básicas, 5 de febrero de 2007

1. Calcula $(2+7i)\cdot(3-5i)$ y expresa el resultado en forma binómica.

   <u>Solución</u>: Multiplicando

$$\begin{aligned}(2+7i)\cdot(3-5i) &= 2\cdot 3+2\cdot(-5i)+7i\cdot 3+7i\cdot(-5i)= \\ &= 6-10i+21i+35=41+11i\end{aligned}$$

2. Calcula $(-1+i)^4$ y expresa el resultado en forma binómica.

   <u>Solución</u>: Podíamos escribir la base en forma exponencial, pero también es sencillo usar el binomio de Newton

$$\begin{aligned}(-1+i)^4 &= \binom{4}{0}(-1)^4\cdot i^0+\binom{4}{1}(-1)^3\cdot i^1+\binom{4}{2}(-1)^2\cdot i^2+ \\ &\quad +\binom{4}{3}(-1)^1\cdot i^3+\binom{4}{4}(-1)^0\cdot i^4= \\ &= 1-4i-6+4i+1=-4\end{aligned}$$

3. Calcula $\overline{(3-i)\cdot(2+i)}\cdot(1+i)$ y expresa el resultado en forma binómica.

   <u>Solución</u>: Podemos conjugar antes o después de multiplicar, porque $\overline{z\cdot\omega}=\overline{z}\cdot\overline{\omega}$

$$\begin{aligned}\overline{(3-i)\cdot(2+i)}\cdot(1+i) &= (3+i)\cdot(2-i)\cdot(1+i)=(6-3i+2i-i^2)\cdot(1+i)= \\ &= (7-i)\cdot(1+i)=7+7i-i-i^2=8+6i\end{aligned}$$

4. Calcula $\dfrac{(1-i)\cdot(2-i)}{2+3i}$ y expresa el resultado en forma binómica.

   <u>Solución</u>: Multiplicamos por el conjugado del denominador

$$\begin{aligned}\frac{(1-i)\cdot(2-i)}{2+3i} &= \frac{2-i-2i+i^2}{2+3i}=\frac{1-3i}{2+3i}=\frac{(1-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}= \\ &= \frac{2-3i-6i+9i^2}{2^2+3^2}=-\frac{7}{13}-\frac{9}{13}\cdot i\end{aligned}$$

5. Calcula el módulo de $\dfrac{2+i\sqrt{5}}{4+3i}$.

   <u>Solución</u>: Aprovechamos que $|z/\omega|=|z|/|\omega|$.

$$\left|\frac{2+i\sqrt{5}}{4+3i}\right|=\frac{|2+i\sqrt{5}|}{|4+3i|}=\frac{\sqrt{2^2+\sqrt{5}^2}}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}$$

6. Calcula $\sqrt[4]{-1}$ y escribe los resultados en forma binómica.

   Solución: Escribimos el radicando $-1 = 1 \cdot e^{i\cdot\pi}$ en forma exponencial.

$$\sqrt[4]{-1} = \begin{cases} \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\pi/4} = e^{i\cdot\pi/4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \\ \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot(\pi+2\pi)/4} = e^{i\cdot 3\pi/4} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \\ \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot(\pi+4\pi)/4} = e^{i\cdot 5\pi/4} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \\ \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot(\pi+6\pi)/4} = e^{i\cdot 7\pi/4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \end{cases}$$

7. Expresa $1 + \sqrt{3}i$ en forma polar o exponencial, expresando el ángulo en radianes.

   Solución: Calculamos módulo y argumento, teniendo en cuenta que el número complejo pertenece al primer cuadrante

$$\left|1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \arg\left(1 + \sqrt{3}i\right) = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

   Por tanto $1 + \sqrt{3}i = 2_{\pi/3} = 2e^{i\cdot\pi/3}$.

8. Expresa $\dfrac{2i^{84} - i^{247}}{3i^{24} + i^{45}}$ en forma binómica.

   Solución: Vamos a simplificar las potencias

$$i^{84} = (-1)^{42} = 1, \quad i^{247} = (-1)^{123} i = -i, \quad i^{24} = (-1)^{12} = 1, \quad i^{45} = (-1)^{22} i = i$$

   Entonces, simplificando y utilizando el conjugado del denominador,

$$\frac{2i^{84} - i^{247}}{3i^{24} + i^{45}} = \frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{3^2 + 1^2} = \frac{6 - 2i + 3i - i^2}{10} = \frac{7}{10} + i \cdot \frac{1}{10}$$

9. Expresa $\dfrac{2 - 2\sqrt{3}i}{-2 + 2i}$ en forma polar o exponencial, expresando el ángulo en radianes.

   Solución: Calculamos módulo y argumento de numerador y denominador

$$\left|2 - 2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4, \quad \arg\left(2 - 2\sqrt{3}i\right) = \arctan\frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

$$|-2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \arg(-2 + 2i) = \arctan\frac{2}{-2} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

   En el denominador hemos tenido en cuenta que pertenece al segundo cuadrante para calcular su argumento. Finalmente se obtiene

$$\frac{2 - 2\sqrt{3}i}{-2 + 2i} = \frac{4e^{-i\cdot\pi/3}}{2\sqrt{2}e^{i\cdot 3\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\cdot\pi/3 - i\cdot 3\pi/4)} = \sqrt{2}e^{-i\cdot 13\pi/12} = \sqrt{2}e^{i\cdot 11\pi/12} = \sqrt{2}_{11\pi/12}$$

10. Expresa $\dfrac{5_{\pi/4}\cdot 7_{-\pi/12}}{2_{\pi/3}} = \dfrac{5e^{i\cdot\pi/4}\cdot 7e^{-i\cdot\pi/12}}{2e^{i\cdot\pi/3}}$ en forma binómica.

    Solución: Operamos

$$\frac{5e^{i\cdot\pi/4}\cdot 7e^{-i\cdot\pi/12}}{2e^{i\cdot\pi/3}} = \frac{5\cdot 7}{2}e^{i\cdot\pi/4-i\cdot\pi/12-i\cdot\pi/3} = \frac{35}{2}e^{-i\cdot\pi/6} = \frac{35}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{35\sqrt{3}}{4} - i\frac{35}{4}$$

Examen de problemas, 5 de febrero de 2007

1. Se considera la función $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v(x,y) = ax^3 - 6xy^2, \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) (0.5 puntos) Estudia para qué valor del parámetro a existe una función holomorfa $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Solución: Tenemos que estudiar cuándo $v(x,y)$ es armónica, es decir, cuando se anula su laplaciano para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Delta v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 6ax - 12x = (6a-12)x$$

Deducimos que $v(x,y)$ es armónica, y por lo tanto parte imaginaria de una función holomorfa, si y sólo si $a = 2$.

(b) (1 punto) Para este caso encuentra la parte real $u(x,y)$ que cumple $f(2-i) = 2+4i$.

Solución: Consideramos $a = 2$ y buscamos $u(x,y)$ a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -12xy \longrightarrow u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dx = -6x^2y + \phi(y)$$

De la otra ecuación de cauchy-Riemann

$$-6x^2 + \phi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -(6x^2 - 6y^2) \longrightarrow \phi'(y) = 6y^2$$

Integrando

$$\phi'(y) = \int \phi(y)\,dy = \int 6y^2\,dy = 2y^3 + C \longrightarrow u(x,y) = -6x^2y + 2y^3 + C$$

Ya sólo falta por determinar C, de la condición

$$\begin{aligned} 2+4i &= f(2-i) = u(2,-1) + i\cdot v(2,-1) = \\ &= -6\cdot 2^2(-1) + 2(-1)^3 + C + i\cdot(2\cdot 2^3 - 6\cdot 2(-1)^2) = \\ &= 22 + C + 4i \longrightarrow C = -20 \end{aligned}$$

Por tanto la función buscada es $u(x,y) = -6x^2y + 2y^3 - 20$.

2. Se considera la función
$$f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-2)(z-4)}$$

(a) (0.5 puntos) Realiza la descomposición en fracciones simples de $f(z)$.

Solución: Descomponemos en fracciones simples
$$\frac{3z}{(z-1)(z-2)(z-4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-4}$$
$$= \frac{A(z-2)(z-4) + B(z-1)(z-4) + C(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-4)}$$
$$= \frac{(A+B+C)z^2 + (-6A-5B-3C)z + (8A+4B+2C)}{(z-1)(z-2)(z-4)}$$

Resolvemos el sistema
$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -6A-5B-3C &= 3 \\ 8A+4B+2C &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ B+3C &= 3 \\ -4B-6C &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ B+3C &= 3 \\ 6C &= 12 \end{aligned}$$

La solución es $C=2$, $B=-3$, $A=1$, y por lo tanto
$$f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-2)(z-4)} = \frac{1}{z-1} - \frac{3}{z-2} + \frac{2}{z-4}$$

(b) (0.5 puntos) Construye la serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ válida para $|z| < 1$.

Solución: Desarrollamos en serie ahora cada uno de los tres sumandos.
$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ si } |z| < 1$$
$$-\frac{3}{z-2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \text{ si } |z| < 2$$
$$\frac{2}{z-4} = -\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{1-z/4} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n} \text{ si } |z| < 4$$

La serie buscada es la suma de las tres anteriores
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3z}{(z-1)(z-2)(z-4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{3}{2 \cdot 2^n} - \frac{1}{2 \cdot 4^n} \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^{2n+1} + 3 \cdot 2^n - 1}{2^{2n+1}} z^n \text{ si } |z| < 1 \end{aligned}$$

(c) (0.5 puntos) Construye la serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$ válida para $|z| > 4$.

Solución: Procedemos de forma análoga, aunque buscamos las series con potencias negativas de z.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \text{ si } |z| > 1$$

$$-\frac{3}{z-2} = -\frac{3}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} = -\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} \text{ si } |z| > 2$$

$$\frac{2}{z-4} = \frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-4/z} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^n} \text{ si } |z| > 4$$

Sumando estas tres series

$$f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-2)(z-4)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - 3\cdot 2^n + 2^{2n+1})\cdot\frac{1}{z^{n+1}} \; si|z| > 4$$

3. Calcula las siguientes integrales siempre que tengan sentido

(a) (1.5 puntos) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\operatorname{sen} t}\,dt$

Solución: Tenemos que reescribir como una integral a lo largo de la circunferencia $|z| = 1$. Tomando $\gamma(t) = e^{i\cdot t}$, $\gamma'(t) = i\cdot e^{i\cdot t} = i\cdot\gamma(t)$, y entonces

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\operatorname{sen} t}\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\left(\frac{e^{i\cdot t}-e^{-i\cdot t}}{2i}\right)}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\left(\frac{\gamma(t)-1/\gamma(t)}{2i}\right)}\cdot\left(\frac{\gamma'(t)}{i\cdot\gamma(t)}\right)dt = \int_\gamma f(z)\,dz$$

para la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{1}{5-4\left(\frac{z-1/z}{2i}\right)}\cdot\left(\frac{1}{i\cdot z}\right) = \frac{1}{-2z^2+5iz+2}$$

Calculamos las singularidades

$$-2z^2+5iz+2 = 0 \longrightarrow z = \frac{-5i\pm\sqrt{(5i)^2-4\cdot(-2)\cdot 2}}{2\cdot(-2)} = \frac{-5i\pm\sqrt{-9}}{-4}$$

$$= \frac{-5i\pm 3i}{-4} = \begin{cases} i/2 \\ 2i \end{cases}$$

Así pues podemos factorizar

$$f(z) = \frac{1}{-2z^2 + 5iz + 2} = \frac{1}{-2 \cdot (z - i/2) \cdot (z - 2i)}$$

De las dos singularidades la única que está dentro de la curva $\gamma(t) = e^{i \cdot t}$ es $z_1 = i/2$, y por lo tanto hay que calcular $\mathrm{Res}(f, i/2)$. Para ello construimos

$$g(z) = f(z) \cdot (z - i/2) = \frac{(z - i/2)}{-2 \cdot (z - i/2) \cdot (z - 2i)} = \frac{1}{-2 \cdot (z - 2i)} \longrightarrow g(i/2)$$

y entonces

$$\mathrm{Res}(f, i/2) = g(i/2) = \frac{1}{-2 \cdot (i/2 - 2i)} = \frac{1}{3i}$$

Concluimos finalmente que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4 \operatorname{sen} t}\, dt = 2\pi \cdot i \cdot (1/3i) = 2\pi/3$$

(b) (2 puntos) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{(z+1)^2(z-1)^2(z-2)}\, dz$ para $\gamma_1(t) = 2 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

<u>Solución</u>: Vamos a aplicar el teorema de los residuos y a distinguir casos en función de r. Está claro que las singularidades son $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$ (polos de orden 2) y $z_3 = 2$ (polo de orden 1).

$$g_1(z) = f(z) \cdot (z+1)^2 = \tfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}$$

$$g_1'(z) = \tfrac{-\left(2(z-1)(z-2) + (z-1)^2\right)}{(z-1)^4(z-2)^2} = \tfrac{-3z+5}{(z-1)^3(z-2)^2}$$

$$\mathrm{Res}(f, -1) = g_1'(-1) = \tfrac{-3(-1)+5}{(-1-1)^3(-1-2)^2} = \tfrac{8}{-8 \cdot 9} = -\tfrac{1}{9}$$

$$g_2(z) = f(z) \cdot (z-1)^2 = \tfrac{1}{(z+1)^2(z-2)}$$

$$g_2'(z) = \tfrac{-\left(2(z+1)(z-2) + (z+1)^2\right)}{(z+1)^4(z-2)^2} = \tfrac{-3z+3}{(z+1)^3(z-2)^2}$$

$$\mathrm{Res}(f, 1) = g_2'(1) = \tfrac{-3 \cdot 1 + 3}{(1+1)^3(1-2)^2} = 0$$

$$g_3(z) = f(z) \cdot (z-2) = \tfrac{1}{(z+1)^2(z-1)^2} = \tfrac{1}{(z^2-1)^2}$$

$$\mathrm{Res}(f, 2) = g_3(2) = \tfrac{1}{(2^2-1)^2} = \tfrac{1}{9}$$

La curva γ_1 es la circunferencia de centro $z_0 = 2$ y radio $r > 0$. Así pues, el punto z_3 es el centro y siempre está dentro de la circunferencia, el punto $z_2 = 1$ solamente si $r > |z_2 - z_0| = |-1| = 1$ y el punto $z_1 = -1$ si $r > |z_1 - z_0| = |-3| = 3$. Distinguimos entonces tres casos

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi \cdot i \cdot \mathrm{Res}(f,2) = 2\pi \cdot i/9 \text{ si } r < 1 \\ 2\pi \cdot i \cdot (\mathrm{Res}(f,2) + \mathrm{Res}(f,1)) = 2\pi \cdot i/9 \text{ si } 1 < r < 3 \\ 2\pi \cdot i \cdot (\mathrm{Res}(f,2) + \mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,-1)) = 0 \text{ si } r > 3 \end{cases}$$

(c) (1 punto) $\int_{\gamma_2} \frac{e^{1/(z-4)}}{z-4}\,dz$ para $\gamma_2(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

Solución: Claramente la única singularidad es $z_1 = 4$. Como la singularidad es esencial tenemos que construir la serie de Laurent, para lo cual partimos. Tomamos $\omega = 1/(z-4)$ la serie de potencias de la exponencial

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{e^{1/(z-4)}}{z-4} = \omega \cdot e^{\omega} = \omega \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-4)^{n+1} \cdot n!} = \\ &= \tfrac{1}{z-4} + \tfrac{1}{(z-4)^2} + \tfrac{1}{2\cdot(z-4)^3} + \tfrac{1}{6\cdot(z-4)^4} + \dots \end{aligned}$$

Entonces $Res(f,4) = 1$ y $z_1 = 4$ está dentro de la curva γ_2 si $r > 4$, de donde

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{1/(z-4)}}{z-4}\,dz = \begin{cases} 0 \text{ si } r < 4 \\ \\ 2\pi \cdot i \cdot \mathrm{Res}(f,4) = 2\pi \cdot i \text{ si } r > 4 \end{cases}$$

4. Resuelve los siguientes apartados

(a) (1 punto) Calcula la transformada de Laplace de $f(t) = te^t \cos t$.

Solución: Hay varias formas de calcular esta transformada. Por ejemplo, podemos descomponer el coseno en exponenciales complejas

$$t \cdot e^t \cdot \cos t = t \cdot e^t \cdot (e^{i\cdot t} + e^{-i\cdot t})/2 = (t \cdot e^{(1+i)t} + t \cdot e^{(1-i)t})/2$$

Sabemos que $\mathcal{L}[t](z) = 1/z^2$, y en virtud del primer teorema de traslación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t \cdot e^{(1+i)t}\right] &= \mathcal{L}[t](z - (1+i)) = \tfrac{1}{(z-1-i)^2} \\ \mathcal{L}\left[t \cdot e^{(1-i)t}\right] &= \mathcal{L}[t](z - (1-i)) = \tfrac{1}{(z-1+i)^2} \\ \mathcal{L}\left[t \cdot e^t \cdot \cos t\right] &= \tfrac{1/2}{(z-1-i)^2} + \tfrac{1/2}{(z-1+i)^2} = \tfrac{((z-1+i)^2 + (z-1-i)^2)/2}{(z-1-i)^2 \cdot (z-1+i)^2} = \\ &= \tfrac{((z-1)^2 + 2i(z-1) + i^2 + (z-1)^2 - 2i(z-1) + i^2))/2}{((z-1)^2 - i^2)^2} = \\ &= \tfrac{z^2 - 2z}{((z-1)^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

También podía haberse calculado esta transformada derivando

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos t](z) &= \tfrac{z}{z^2+1} \\
\mathcal{L}\left[e^t \cdot \cos t\right](z) &= \mathcal{L}[\cos t](z-1) = \tfrac{z-1}{(z-1)^2+1} \\
\mathcal{L}\left[t \cdot e^t \cdot \cos t\right](z) &= -\tfrac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{L}\left[e^t \cdot \cos t\right](z)\right) = -\tfrac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{z-1}{(z-1)^2+1}\right) = \\
&= -\tfrac{(z-1)^2+1-(z-1)2(z-1)}{((z-1)^2+1)^2} = \tfrac{z^2-2z}{((z-1)^2+1)^2}
\end{aligned}$$

(b) (1.5 puntos) Resuelve la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y(t) = \cos 2t$$

junto con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

<u>Solución</u>: Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación

$$z^2\mathcal{L}[y] - z \cdot y(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos 2t] = \tfrac{z}{z^2+2^2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (z^2+4)\mathcal{L}[y] = \tfrac{z}{z^2+4} \longrightarrow \mathcal{L}[y] = \tfrac{z}{(z^2+4)^2} = \tfrac{z}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$$

Tenemos como singularidades $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ (polos de orden 2)

$g_1(z) = e^{tz}\mathcal{L}[y](z-2i)^2 = \tfrac{ze^{tz}}{(z+2i)^2}$

$g_1'(z) = \tfrac{(e^{tz}+tze^{tz})(z+2i)^2 - ze^{tz}2(z+2i)}{(z+2i)^4}$

$\text{Res}(e^{tz}\mathcal{L}[y], 2i) = g_1'(2i) = \tfrac{(e^{2it}+2ite^{2it})(2i+2i)^2 - 2ie^{2it}2(2i+2i)}{(2i+2i)^4} =$

$= \tfrac{te^{2it}}{8i} = \tfrac{t}{4} \cdot \tfrac{e^{2it}}{2i}$

$g_2(z) = e^{tz}\mathcal{L}[y](z+2i)^2 = \tfrac{ze^{tz}}{(z-2i)^2}$

$g_2'(z) = \tfrac{(e^{tz}+tze^{tz})(z-2i)^2 - ze^{tz}2(z-2i)}{(z-2i)^4}$

$\text{Res}(e^{tz}\mathcal{L}[y], -2i) = g_2'(-2i) = \tfrac{(e^{-2it}-2ite^{-2it})(-2i-2i)^2 + 2ie^{-2it}2(-2i-2i)}{(-2i-2i)^4} =$

$= -\tfrac{te^{-2it}}{8i} = \tfrac{t}{4} \cdot \left(-\tfrac{e^{-2it}}{2i}\right)$

$y(t) = \text{Res}(e^{tz}\mathcal{L}[y], 2i) + \text{Res}(e^{tz}\mathcal{L}[y], -2i) = \tfrac{t}{4} \cdot \tfrac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i} = \tfrac{t \cdot \text{sen}\, 2t}{4}$