Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica

Examen de operaciones básicas, 7 de septiembre de 2006

1. **Calcula en radianes el argumento de** $(-1+i)$

   Solución: El número complejo $-1+i$ está situado en el segundo cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

   $$\varphi = \arctan \frac{1}{-1} = \arctan -1$$

   y sabiendo que

   $$\tan -\frac{\pi}{4} = -1$$

   Como estamos en el segundo cuadrante, hay que sumar π

   $$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

2. **Calcula el inverso de** $(1-i)$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: El inverso z^{-1} de un número complejo z está definido como

   $$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

   con esta definición podemos poner

   $$z^{-1} = \frac{1}{1-i} = \frac{(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1^2+1^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

3. **Calcula el módulo de** $\dfrac{(1+i)}{(2+i)}$.

   Solución: Utilizando las propiedades del módulo

   $$\left|\frac{(1+i)}{(2+i)}\right| = \frac{|(1+i)|}{|(2+i)|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

4. **Calcula** $(1+2i)^4$**, expresando el resultado en forma binómica.**

Solución: Es posible encontrar la solución utilizando la expresión del binomio de Newton

$$\begin{aligned}
(1+2i)^4 &= \binom{4}{0}(1)^0(2i)^4+\binom{4}{1}(1)^1(2i)^3+\binom{4}{2}(1)^2(2i)^2+\binom{4}{3}(1)^3(2i)^1+\binom{4}{4}(1)^4(2i)^0 \\
&= (2i)^4+4(2i)^3+6(2i)^2+4(2i)^1+(2i)^0 \\
&= 16i^4+32i^3+24i^2+8i+1 \\
&= 16-32i-24+8i+1 \\
&= -7-24i
\end{aligned}$$

o como es una potencia pequeña podemos obtener el mismo resultado multiplicando directamente

$$(1+2i)^4=(1+2i)\cdot(1+2i)\cdot(1+2i)\cdot(1+2i)=(-3+4i)\cdot(-3+4i)=-7-24i$$

5. **Calcula $\left(\sqrt{\sqrt{3}+3i}\right)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Para realizar el cálculo de la raíz, en primer lugar ponemos el número complejo $\sqrt{3}+3i$ en forma polar, para ello calculamos su módulo

$$\left|\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}$$

y su argumento, teniendo en cuenta que está en el primer cuadrante

$$\varphi=\arctan\frac{3}{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

El número complejo del radicando es en forma polar

$$\left(\sqrt{12}\right)_{\pi/3}=\left(12^{1/2}\right)_{\pi/3}$$

Utilizamos ahora la definición de raíz cuadrada

$$w_k=\left(12^{1/2}\right)^{1/2}_{\frac{\pi/3+2k\pi}{2}} \qquad k=0,1$$

luego

$$\left(12^{1/2}\right)^{1/2}_{\frac{\pi/3+2k\pi}{2}}=\begin{cases} 12^{1/4}_{\pi/6}=12^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=12^{1/4}\left(\sqrt{3}/2+i/2\right) & k=0 \\ 12^{1/4}_{7\pi/6}=12^{1/4}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right)=12^{1/4}\left(-\sqrt{3}/2-i/2\right) & k=1 \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que

$$12^{1/4}=2^{1/2}3^{1/4}$$

el resultado final será:

$$\sqrt{\sqrt{3}+3i} = \begin{cases} 2^{-1/2}\cdot 3^{3/4} + i\cdot 2^{-1/2}\cdot 3^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{27}{4}} + i\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \\ \\ -2^{-1/2}\cdot 3^{3/4} - i\cdot 2^{-1/2}\cdot 3^{1/4} = -\sqrt[4]{\frac{27}{4}} - i\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \end{cases}$$

6. **Calcula $\frac{(1+i)}{(1-2i)}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador tendremos

$$\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(1+2i)+i-2}{1^2+2^2} = \frac{-1+3i}{5} = -\frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$$

7. **Expresa $(-1-i)$ en forma exponencial. Utiliza los argumentos en radianes.**

   Solución: El argumento φ del número $-1-i$, que se encuentra en el tercer cuadrante se calcula como

$$\varphi = \pi + \arctan\frac{-1}{-1} = \pi + \arctan 1 = \pi + \pi/4 = \frac{5\pi}{4}$$

   Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$-1-i = |-1-i|e^{i\varphi} = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

8. **Calcula $\frac{(i^{34}-i^{40})}{(i^{47}-1)}$ y expresa el resultado en forma binómica**

   Solución: Expresamos las potencias de i en módulo 4:

$$\frac{i^{34}-i^{40}}{i^{47}-1} = \frac{i^{4*8+2}-i^{4*10}}{i^{4*11+3}-1} = \frac{i^2-1}{i^3-1} = \frac{-2}{-i-1} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

9. **Calcula $\frac{(1+i)}{(1+i\sqrt{3})}$ en forma modulo-argumental (polar), expresando el ángulo en radianes.**

   Solución: En primer lugar ponemos cada uno de los números en forma modulo-argumental

$$\begin{aligned} (1+i) &= \sqrt{2}_{\pi/4} \\ \left(1+i\sqrt{3}\right) &= 2_{\pi/3} \end{aligned}$$

   y ahora hacemos la división

$$\frac{1+i}{(1+i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{2_{\pi/3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\pi/4-\pi/3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-\pi/12}$$

10. **Calcula** $(4+2i)\cdot(2-2i)$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Multiplicando elemento a elemento

$$(4+2i)\cdot(2-2i) = 8-8i+4i+4 = 12-4i$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 7 de septiembre de 2006

1. **Responde de forma razonada a los siguientes apartados:**

   (a) **(1 punto) Encuentra todas las funciones analíticas** $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ **con**
   $$v(x,y) = ax^3 - 4xy^3 \qquad a \in \mathbb{R}$$
   Solución: En primer lugar debemos comrobar si la función $v(x,y)$ es armónica, para ello tenemos que comprobar que cumple la ecuación
   $$v_{xx} + v_{yy} = 0$$
   Evaluamos las derivadas correspondientes:
   $$v_x = 3ax^2 - 4y^3 \quad \Rightarrow \quad v_{xx} = 6ax$$
   $$v_y = -12xy^2 \qquad \Rightarrow \quad v_{yy} = -24xy$$
   y sustituyendo en la ecuación de las funciones armónicas
   $$v_{xx} + v_{yy} = 6ax + (-24xy) = 0 \Leftrightarrow 6x(a - 4y) = 0$$
   Como a, según el enunciado, es un número real la ecuación anterior no tiene solución salvo cuando $x = 0$ o $a = 4y$, pero en ambos casos es absurdo, el primero porque x no sería variable y en el segundo porque a no sería un número real sino una función. Por tanto, la función no es armónica y el problema no tiene solución.
   Si tomamos $a = 4y$, entonces parece dar la impresión de ser una solución válida, pero en ese caso la función v sería
   $$\widetilde{v}(x,y) = v(x,y) = 4yx^3 - 4xy^3$$
   lo que implica que la derivada sería
   $$\widetilde{v}_y(x,y) = 4x^3 - 12xy^2 \neq v_y(x,y)$$
   Este error aparece porque al buscar el carácter de ármonica de $v(x,y)$ suponíamos que a era una constante y por tanto su derivada respecto a y era 0, pero si $a = 4y$, entonces esto no es cierto.

   (b) **(1 punto) Resuelve la siguiente ecuación:** $\operatorname{sen}(z) = 4$.
   Solución: Utilizamos la definición de $\operatorname{sen}(z)$ para poner
   $$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 4$$

de donde

$$\frac{e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}}{2i} = 4$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

(observa que $w \neq 0$)

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = 4$$

Multiplicamos por $2i$

$$w - \frac{1}{w} = 8i$$

y ahora por w

$$w^2 - 1 = 8wi$$

Para calcular w, resolvemos la ecuación de segundo grado

$$w^2 - 8iw - 1 = 0$$

que tiene por soluciones

$$\begin{aligned} w &= \frac{8i \pm \sqrt{(8i)^2 + 4}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{-64+4}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{-60}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{4 \cdot 15}i}{2} \\ &= \frac{8i \pm 2\sqrt{15}i}{2} = \left(4 \pm \sqrt{15}\right) i \end{aligned}$$

y tenemos dos soluciones

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(4 + \sqrt{15}\right) i \\ w_2 &= \left(4 - \sqrt{15}\right) i \end{aligned}$$

El valor de z se obtiene tomando logaritmos

$$\begin{aligned} e^{iz_1} &= w_1 \Leftrightarrow iz_1 = L\left(\left(4 + \sqrt{15}\right) i\right) = \ln\left(4 + \sqrt{15}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ e^{iz_2} &= w_2 \Leftrightarrow iz_2 = L\left(\left(4 - \sqrt{15}\right) i\right) = \ln\left(4 - \sqrt{15}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} z_1 &= -i\ln\left(4 + \sqrt{15}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ z_2 &= -i\ln\left(4 - \sqrt{15}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

2. **Calcula las siguientes integrales**

$$a)\ \textbf{(1.25 puntos)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\cos(t))}dt \qquad b)\ \textbf{(1.25 puntos)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Solución:

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\cos(t))}dt$ es una integral del tipo trigonométrica que se transforma en una integral compleja mediante el cambio correspondiente

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \Rightarrow \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \qquad dt \Rightarrow \frac{1}{iz}dz$$

La integral que obtenemos es

$$\int_\gamma \frac{1}{5-3\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}\frac{1}{iz}dz$$

siendo

$$\gamma = \gamma(t) = e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

la circunferencia centrada en el origen y radio 1.
Desarrollando tendremos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{\left(5-\frac{3z^2+3}{2z}\right)}\frac{1}{iz}dz &= \int_\gamma \frac{1}{\frac{10z-(3z^2+3)}{2z}}\frac{1}{iz}dz \\
&= \int_\gamma \frac{2}{(10z-(3z^2+3))}\frac{1}{i}dz \\
&= \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{1}{(10z-3z^2-3)}dz
\end{aligned}$$

El polinomio del denominador

$$\left(10z-3z^2-3\right)$$

puede descomponerse sacando las raíces correspondientes

$$-3z^2+10z-3=0 \Leftrightarrow z = \frac{-10\pm\sqrt{10^2-36}}{-6} = \frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{-6} = \frac{-10\pm 8}{-6}$$

Y las raíces son

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3 \\
z_2 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

El polinomio puede factorizarse como

$$\left(10z - 3z^2 - 3\right) = -3\,(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right)$$

Observa que el factor -3 aparece porque el coeficiente principal del polinomio no es unitario, sino -3.
La integral se puede expresar entonces como

$$\frac{2}{i}\int_{\gamma} \frac{1}{(10z - 3z^2 - 3)}dz = \frac{2}{i}\int_{\gamma} \frac{1}{-3\,(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}dz = \frac{2i}{3}\int_{\gamma} \frac{1}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}dz$$

donde hemos tomado $1/i = -i$.
La integral anterior se calcula aplicando el teorema de los residuos. Para ello necesitamos los residuos de aquellas singularidades que están dentro del círculo unidad, en este caso solamente $z_2 = \frac{1}{3}$.

$$\frac{2i}{3}\int_{\gamma} \frac{1}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}dz = \frac{2i}{3}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}, \frac{1}{3}\right)$$

La singularidad $\frac{1}{3}$ es un polo simple de la función del integrando, luego

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-3i)\left(z-\frac{1}{3}i\right)}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\phi\left(\frac{1}{3}\right)}{1!} = \phi\left(\frac{1}{3}\right)$$

siendo

$$\phi(z) = \frac{1}{(z-3)}$$

y evaluando en $z_2 = \frac{1}{3}$ para obtener el residuo

$$\phi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1/3 - 3} = -\frac{3}{8}$$

Con este dato la integral vale

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\cos(t)}dt = \frac{2i}{3}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2i}{3}2\pi i\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Observa que el resultado es, aunque se utilicen números coplejos, un número real.

(b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$, integral de tipo I donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional, con $\partial p + 2 \leq \partial q$ y sin polos reales. Utilizamos la fórmula correspondiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Res}\left(H(z), z_k\right)$$

con
$$H(z)=\frac{1}{z^2+z+1}$$
Tenemos que descomponer el denominador en factores para localizar las singularidades. Resolvemos la ecuación de segundo grado del denominador para obtener las singularidades
$$z^2+z+1=0$$
resolvemos
$$z^2+z+1=0\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
y se obtienen dos raíces
$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 &= \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$
De las dos singularidades anteriores, solamente z_1 contribuye al cálculo de la integral, puesto que es la única con parte imaginaria positiva. El cálculo de los residuos es muy sencillo, teniendo en cuenta que $H(z)$ es de la forma
$$H(z)=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$
y que z_1 es un polo simple
$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(H(z),z_1) &= \frac{1}{(z_1-z_2)} \\ \frac{1}{\left(\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}i \end{aligned}$$
la integral es
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx &= 2\pi i\sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0}\operatorname{Res}(H(z),z_k) \\ &= 2\pi i\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

3. **Calcula las siguientes integrales sobre los caminos indicados**

   a) **(1.25 puntos)** $\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{1}{z^2(z-1)(z-3)^2}dz \qquad \gamma_1(t)=2e^{it} \qquad t\in[0,2\pi]$

   b) **(1.25 puntos)** $\displaystyle\int_{\gamma_2} ze^{1/(z-2)}dz \qquad \gamma_2(t)=1+2e^{it} \qquad t\in[0,2\pi]$

Solución: Resolveremos cada apartado utilizando el teorema de los residuos, puesto que son curvas cerradas y las funciones tienen solamente singularidades aisladas.

(a) Es una circunferencia de centro 0 y radio 2. Las singularidades son $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ y $z_2 = 3$, de las cuales z_0 y z_1 están en el interior de la curva, mientras que z_2 está fuera de ella y por tanto no contribuirá al calculo de la integral

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 (z-1)(z-3)^2} dz = 2\pi i \{\mathrm{Res}(f(z), 0) + \mathrm{Res}(f(z), 1)\}$$

En $z_0 = 0$, la función presenta una singularidad tipo polo de orden 2 cuyo residuo es muy sencillo de calcular, puesto que es de la forma

$$f(z) = \frac{\phi_1(z)}{z^2} \Rightarrow \mathrm{Res}(f(z), 0) = \frac{\phi_1'(0)}{1!} = \phi_1'(0)$$

donde

$$\phi_1(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2} \Rightarrow \phi_1'(z) = \frac{-\left\{(z-3)^2 + 2(z-1)(z-3)\right\}}{\left((z-1)(z-3)^2\right)^2}$$

y evaluando en $z_0 = 0$

$$\phi_1'(0) = -\frac{15}{81} = -\frac{5}{27}$$

En $z_1 = 1$, la función presenta una singularidad tipo polo simple, cuyo residuo se calcula también de forma sencilla teniendo en cuenta que ahora $f(z)$ se puede poner como

$$f(z) = \frac{\phi_2(z)}{(z-1)} \Rightarrow \mathrm{Res}(f(z), 1) = \frac{\phi_2(1)}{0!} = \phi_2(1)$$

donde

$$\phi_2(z) = \frac{1}{z^2 (z-3)^2} \Rightarrow \phi_2(1) = \frac{1}{4}$$

y la integral es

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 (z-1)(z-3)^2} dz = 2\pi i \left\{-\tfrac{5}{27} + \tfrac{1}{4}\right\} = \tfrac{7\pi i}{54}$$

(b) En este caso solamente hay una singularidad $z_0 = 2$ que además está dentro de la circunferencia de centro 1 y radio 2, que es la curva indicada. Además esta singularidad es esencial, por tanto el residuo de la función en esa singularidad se debe obtener a través del desarrollo de Laurent en centrado en dicha singularidad

$$ze^{1/(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-2)^n}$$

Para encontrar el desarrollo buscado utilizaremos el desarrollo de la función exponencial, válido para cualquier valor $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Transformaremos en primer lugar la función

$$ze^{1/(z-2)} = (z-2)\, e^{1/(z-2)} + 2e^{1/(z-2)}$$

y desarrollamos en cada sumando de forma independiente utilizando el desarrollo conocido de e^z

$$e^{1/(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/(z-2))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-2)^n}$$

sustituyendo

$$ze^{1/(z-2)} = (z-2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-2)^n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-2)^n}$$

buscamos ahora el coeficiente de la potencia -1, que se obtiene en el primer sumando cuando $n = 2$ y en el segundo cuando $n = 1$

$$\frac{1}{2!} + 2\frac{1}{1!} = \frac{5}{2}$$

y la integral es

$$\int_{\gamma_2} ze^{1/(z-2)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 2) = 2\pi i \frac{5}{2} = 5\pi i$$

4. **Resuelve los siguientes apartados**

   (a) **(0.5 puntos) Calcula de forma razonada (sin tablas) la transformada de Laplace de $f(t) = \operatorname{sen}(\alpha t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.**

   (b) **(1.25 puntos) Resuelve la siguiente ecuación diferencial**

   $$y''(t) + 4y(t) = \operatorname{sen}(t)$$

   junto con las condiciones iniciales

   $$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 0$$

Solución:

(a) Calcularemos la transformada de $\operatorname{sen}(\alpha t)$ utilizando su definición

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(\alpha t))(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \operatorname{sen}(\alpha t)\, dt$$

Lo haremos de forma directa utilizando la definición de $\operatorname{sen}(\alpha t)$

$$\int_0^\infty e^{-zt} \operatorname{sen}(\alpha t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{t(i\alpha - z)} - e^{-t(i\alpha + z)} dt$$

integral que podemos realizar de forma inmediata

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{t(i\alpha - z)} - e^{-t(i\alpha + z)} dt &= \frac{1}{2i} \frac{1}{i\alpha - z} e^{t(i\alpha - z)} + \frac{1}{i\alpha + z} e^{-t(i\alpha + z)} \Big|_{t=0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{i\alpha - z} + \frac{1}{i\alpha + z} \right\} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}
\end{aligned}$$

(b) Aplicaremos la transformada de Laplace a la ecuación junto con sus propiedades

$$\mathcal{L}\left(y''(t) + 4y(t)\right) = \mathcal{L}\left(\operatorname{sen}(t)\right)$$

Para la primera parte de la ecuación empleamos las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y''(t) + 4y(t)\right) &= \mathcal{L}\left(y''(t)\right) + 4\mathcal{L}\left(y(t)\right) \\
&= \left(z^2 \mathcal{L}\left(y(t)\right) - zy(0) - y'(0)\right) + 4\mathcal{L}\left(y(t)\right) \\
&= z^2 \mathcal{L}\left(y(t)\right) + 4\mathcal{L}\left(y(t)\right) \\
&= \left(z^2 + 4\right) \mathcal{L}\left(y(t)\right)
\end{aligned}$$

Para el cálculo de la transformada $\operatorname{sen}(t)$ podemos utilizar el apartado anterior con $\alpha = 1$ (o utilizar en este caso tablas)

$$\mathcal{L}\left(\operatorname{sen}(t)\right)(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

Por tanto debe ocurrir

$$\left(z^2 + 4\right) \mathcal{L}\left(y(t)\right) = \frac{1}{1 + z^2}$$

de donde

$$\mathcal{L}\left(y(t)\right) = \frac{1}{\left(1 + z^2\right)\left(z^2 + 4\right)}$$

Para hallar $y(t)$ tenemos que tomar la transformada inversa en ambos lados

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(1 + z^2\right)\left(z^2 + 4\right)}\right)(t)$$

Para el cálculo de esta transfomada inversa podemos bien utilizar el apartado anterior o mediante la fórmula de inversión con residuos. Si utilizamos la primera técnica tenemos que descomponer la función como sigue

$$\frac{1}{\left(1 + z^2\right)\left(z^2 + 4\right)} = \frac{Az + B}{z^2 + 1} + \frac{Cz + D}{z^2 + 4}$$

Sumando tendremos

$$\frac{(Az+B)\left(z^2+4\right)+(Cz+D)\left(z^2+1\right)}{\left(1+z^2\right)\left(z^2+4\right)}=\frac{(A+C)\,z^3+(B+D)\,z^2+(4A+C)\,z+(4B+D)}{\left(1+z^2\right)\left(z^2+4\right)}$$

identificando numeradores obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ B+D &= 0 \\ 4A+C &= 0 \\ 4B+D &= 1 \end{aligned}$$

que tiene por solución (es muy sencillo obtenerla)

$$\begin{aligned} A &= C=0 \\ B &= -D=1/3 \end{aligned}$$

de modo que

$$y\,(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(1+z^2\right)\left(z^2+4\right)}\right)(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/3}{1+z^2}-\frac{1/3}{4+z^2}\right)(t)$$

utilizamos ahora la propiedad de linealidad, para obtener:

$$\begin{aligned} y\,(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/3}{1+z^2}-\frac{1/3}{4+z^2}\right)(t) \\ &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)(t)-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4+z^2}\right)(t) \end{aligned}$$

y haciendo una ligera transformación en el segundo sumando, multiplicando y dividiendo por 2, obtenemos

$$y\,(t)=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)(t)-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{4+z^2}\right)(t)$$

y si utilizamos el apartado anterior podemos poner

$$y\,(t)=\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t)-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(2t)$$

Para el cálculo de la transformada inversa mediante la fórmula de inversión de Bronwich, tenemos que encontrar las singularidades que en este caso son: i, $-i$, $2i$ y $-2i$. El cálculo de los residuos nos da:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)(z-2i)(z+2i)}e^{zt}, i\right) = \frac{e^{it}}{(2i)(3i)(-i)} = \frac{e^{it}}{6i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)(z-2i)(z+2i)}e^{zt}, -i\right) = \frac{e^{-it}}{(-2i)\,i\,(-3i)} = \frac{e^{-it}}{-6i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)(z-2i)(z+2i)}e^{zt}, 2i\right) = \frac{e^{i2t}}{(3i)(i)(4i)} = \frac{e^{i2t}}{-12i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)(z-2i)(z+2i)}e^{zt}, -2i\right) = \frac{e^{-i2t}}{(-i)(-3i)(-4i)} = \frac{e^{-i2t}}{12i}$$

Sumando los cuatro residuos tendremos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)(z-2i)(z+2i)}\right)(t) = \frac{e^{it}}{6i} + \frac{e^{-it}}{-6i} + \frac{e^{i2t}}{-12i} + \frac{e^{-i2t}}{12i}$$

y agrupando obtenemos el resultado anterior.

5. **(1.25 ptos.) Construye la serie de Laurent de la función dada en la región indicada**

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-4)} \qquad A(0,2,4)$$

Solución: Para encontrar la serie de Laurent de esta función en el anillo indicado, en primer lugar descomponemos la función racional en fracciones simples:

$$\frac{z}{(z-2)(z-4)} = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-4)}$$

Calculamos los coeficientes A y B

$$\frac{z}{(z-2)(z-4)} = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-4)} = \frac{A(z-4)+B(z-2)}{(z-2)(z-4)} = \frac{(A+B)z-(4A+2B)}{(z-2)(z-4)}$$

igualando numeradores nos da el sistema

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ 4A+2B &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

y la función es

$$f(z) = \frac{2}{z-4} - \frac{1}{z-2}$$

Buscaremos ahora el desarrollo de Laurent de cada fracción, teniendo en cuenta que en el anillo ocurre: $2 < |z| < 4$.

Para la primera fracción hacemos la siguiente transformación

$$\frac{2}{z-4} = \frac{2}{4\left(\frac{z}{4}-1\right)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{4}}$$

como $|z| < 4 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{4}\right| < 1$ y entonces

$$\frac{2}{z-4} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{4}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{2n+1}}$$

Para escribir la fracción $\frac{1}{z-2}$ en el conjunto $|z| > 2$ (exterior de un círculo) realizamos la transformación

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n},$$

válida si $|\frac{2}{z}| < 1$, es decir, si $|z| > 2$. Con las dos series obtenidas deducimos que la función se puede expresar como

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-4)} = \frac{2}{z-4} - \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{2n+1}}$$

siempre que simultáneamente $|z| > 2$ y $|z| < 4$, es decir, en el anillo $A(0,2,4)$.

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.