Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica

Examen de operaciones básicas, 10 de julio de 2006

1. **Calcula en radianes el argumento de** $-1 + i\sqrt{3}$.

   Solución: El número complejo $-1 + i\sqrt{3}$ está situado en el segundo cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

   $$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1}$$

   y sabiendo que

   $$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

   Como estamos en el segundo cuadrante, entonces

   $$\varphi\text{è}\in \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

2. **Calcula el inverso de** $7 - 4i$ **y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: El inverso z^{-1} de un número complejo z está definido como

   $$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

   con esta definición podemos poner

   $$z^{-1} = \frac{1}{7-4i} = \frac{(7+4i)}{(7-4i)(7+4i)} = \frac{7+4i}{7^2+4^2} = \frac{7+4i}{65} = \frac{7}{65} + \frac{4}{65}i$$

3. **Calcula el módulo de** $\dfrac{(1+2i)}{(2-3i)}$

   Solución: Utilizando las propiedades del módulo

   $$\left|\frac{(1+2i)}{(2-3i)}\right| = \frac{|(1+2i)|}{|(2-3i)|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{13}\sqrt{65}$$

4. **Calcula** $(1+2i)^3$**, expresando el resultado en forma binómica.**

Solución: Es posible encontrar la solución utilizando la expresión del binomio de Newton

$$\begin{aligned}
(1+2i)^3 &= \binom{3}{0}(1)^0(2i)^3+\binom{3}{1}(1)^1(2i)^2+\binom{3}{2}(1)^2(2i)^1+\binom{3}{3}(1)^3(2i)^0 \\
&= (2i)^3+3(2i)^2+3(2i)^1+(2i)^0 \\
&= 8i^3+3\cdot 4i^2+3\cdot 2i+1 \\
&= -8i-12+6i+1 \\
&= -11-2i
\end{aligned}$$

o como es una potencia pequeña, multiplicando directamente

$$(1+2i)^3=(1+2i)\cdot(1+2i)\cdot(1+2i)=(-3+4i)\cdot(1+2i)=-11-2i$$

5. **Calcula $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

Solución: Para realizar el cálculo de la raíz, en primer lugar ponemos el número complejo $\sqrt{3}+3i$ en forma polar, para ello calculamos su módulo

$$\left|\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}$$

y su argumento, teniendo en cuenta que está en el primer cuadrante

$$\varphi=\arctan\frac{3}{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

El número complejo del radicando es en forma polar

$$\left(\sqrt{12}\right)_{\pi/3}=\left(12^{1/2}\right)_{\pi/3}$$

Utilizamos ahora la definición de raíz cuarta

$$w_k=\left(12^{1/2}\right)^{1/4}_{\frac{\pi/3+2k\pi}{4}} \qquad k=0,1,2,3$$

luego

$$\left(12^{1/2}\right)^{1/4}_{\frac{\pi/3+2k\pi}{4}}=\begin{cases}
12^{1/8}_{\pi/12} & =12^{1/8}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right) \quad k=0\\
12^{1/8}_{7\pi/12} & =12^{1/8}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right) \quad k=1\\
12^{1/8}_{13\pi/12} & ==12^{1/8}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\right) \quad k=2\\
12^{1/8}_{19\pi/12} & ==12^{1/8}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right) \quad k=3
\end{cases}$$

6. **Calcula $\frac{(-1+i)}{(3-8i)}$ y expresa el resultado en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador tendremos

$$\frac{-1+i}{3-8i}=\frac{(-1+i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)}=\frac{(-3-8)+i(-8+3)}{3^2+8^2}=\frac{-11-5i}{73}=-\frac{11}{73}-i\frac{5}{73}$$

7. **Expresa $(-2+2i)$ en forma exponencial. Utiliza los argumentos en radianes.**

   Solución: El argumento φ del número $-2+2i$, que se encuentra en el segundo se calcula como

$$\varphi=\pi-\arctan\frac{2}{2}=\pi-\arctan 1=\pi-\pi/4=\frac{3\pi}{4}$$

   Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$-2+2i=|-2+2i|e^{i\varphi}=2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

8. **Calcula $i^{34}-i^{40}$ y expresa el resultado en forma binómica**

   Solución: Expresamos las potencias de i en módulo 4:

$$i^{34}-i^{40}=i^{4*8+2}-i^{4*10}=i^2-1=-1-1=-2$$

9. **Calcula $\frac{(-1+i)}{(1-i\sqrt{3})}$ en forma modulo-argumental (polar), expresando el ángulo en radianes.**

   Solución: En primer lugar ponemos cada uno de los números en forma modulo-argumental

$$\begin{aligned}(-1+i) &= \sqrt{2}_{3\pi/4}\\ \left(1-i\sqrt{3}\right) &= 2_{-\pi/3}\end{aligned}$$

   y ahora hacemos la división

$$\frac{(-1+i)}{(1-i\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}_{3\pi/4}}{2_{-\pi/3}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{3\pi/4-(-\pi/3)}=\left(\sqrt{2}\right)_{13\pi/12}=\sqrt{2}e^{i\frac{13}{12}\pi}$$

10. **Calcula $(7+3i)\cdot(1-5i)$ y expresa el resultado en forma binómica.**

    Solución: Multiplicando elemento a elemento

$$(7+3i)\cdot(1-5i)=7-35i+3i-15i^2=22-32i$$

<u>Nota</u>: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 10 de julio de 2006

1. **Responde de forma razonada a los siguientes apartados:**

   (a) **(1 punto) Comprueba que** $\forall z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ **con** $|z| = 1 \Rightarrow |\alpha z + \beta| = \left|\overline{\beta} z + \overline{\alpha}\right|$
   Solución: Para comprobar la igualdad podemos en primer lugar elevar al cuadrado cada miembro para obtener

$$|\alpha z + \beta|^2 = \left|\overline{\beta} z + \overline{\alpha}\right|^2$$

   Usando la definición de módulo de un complejo :$|z|^2 = z\overline{z}$ tenemos

$$(\alpha z + \beta)\,\overline{(\alpha z + \beta)} = \left(\overline{\beta} z + \overline{\alpha}\right)\overline{\left(\overline{\beta} z + \overline{\alpha}\right)}$$

   Utilizando las propiedades del conjugado de un número complejo obtendremos

$$(\alpha z + \beta)\left(\overline{\alpha z} + \overline{\beta}\right) = \left(\overline{\beta} z + \overline{\alpha}\right)(\beta \overline{z} + \alpha)$$

   operando

$$\alpha z \overline{\alpha z} + \beta \overline{\alpha z} + \alpha z \overline{\beta} + \beta \overline{\beta} = \overline{\beta} z \beta \overline{z} + \overline{\beta} z \alpha + \overline{\alpha} \beta \overline{z} + \overline{\alpha} \alpha$$

   o

$$|\alpha|^2 |z|^2 + \beta \overline{\alpha z} + \alpha z \overline{\beta} + |\beta|^2 = |\beta|^2 |z|^2 + \overline{\beta} z \alpha + \overline{\alpha} \beta \overline{z} + |\alpha|^2$$

   Según el enunciado del problema tenemos que $|z|^2 = 1$

$$|\alpha|^2 + \beta \overline{\alpha z} + \alpha z \overline{\beta} + |\beta|^2 = |\beta|^2 + \overline{\beta} z \alpha + \overline{\alpha} \beta \overline{z} + |\alpha|^2$$

   expresión que podemos comprobar fácilmente que es cierta.

   (b) **(1 punto) Determina los valores** $x, y \in \mathbb{R}$ **que satisfacen la igualdad**

$$x + iy = (x - iy)^2$$

   Solución: Al tratarse de una identidad entre números complejos, parte real e imaginaria de ambos números deben coincidir, por tanto, lo único que hay que hacer es desarrollar la parte derecha de la igualdad

$$(x - iy)^2 = x^2 + (iy)^2 - 2ixy = x^2 - y^2 - i2xy$$

   y la ecuación queda

$$x + iy = \left(x^2 - y^2\right) - i2xy$$

   Igualando partes reales e imaginarias

$$\operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re}\left(\left(x^2 - y^2\right) - i2xy\right) \Leftrightarrow x = x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$\operatorname{Im}(x + iy) = \operatorname{Im}\left(\left(x^2 - y^2\right) - i2xy\right) \Leftrightarrow y = -2xy \quad (2)$$

Para simplificar y de la segunda ecuación (2) tendremos que es $y \neq 0$ y distinguimos 2 casos:

$$y = -2xy \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \\ y \neq 0 \Rightarrow 1 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Llevamos el primero de los valores $(y = 0)$ a la ecuación 1 y obtenemos

$$x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ x \neq 0 \Rightarrow 1 = x \end{cases}$$

y los complejos resultantes son:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + i0 \\ z_2 &= 1 + i0 \end{aligned}$$

Para el segundo caso $\left(x = -\frac{1}{2}\right)$, volvemos a utilizar la ecuación 1

$$-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

y por tanto

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y tendremos otros dos complejos

$$\begin{aligned} z_3 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_4 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(c) **(1 punto) Resuelve la siguiente ecuación:** $\cos(z) = 4$, **con** $z \in \mathbb{C}$

Solución: Utilizamos la definición de $\cos(z)$ para poner

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 4$$

de donde

$$\frac{e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}}{2} = 4$$

Hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

(observa que $w \neq 0$) para obtener

$$\frac{w + \frac{1}{w}}{2} = 4$$

Multiplicamos por 2

$$w + \frac{1}{w} = 8$$

y ahora por w

$$w^2 + 1 = 8w$$

Para calcular w, resolvemos la ecuación de segundo grado

$$w^2 - 8w + 1 = 0$$

que tiene por soluciones

$$w = \frac{8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

y tenemos dos soluciones

$$\begin{aligned} w_1 &= 4 + \sqrt{15} \\ w_2 &= 4 - \sqrt{15} \end{aligned}$$

A continuación deshacemos el cambio para el cálculo del valor de z

$$\begin{aligned} e^{iz_1} &= w_1 \Leftrightarrow iz_1 = L\left(4 + \sqrt{15}\right) = \ln\left(4 + \sqrt{15}\right) + i\,(2k\pi) \\ e^{iz_2} &= w_2 \Leftrightarrow iz_2 = L\left(4 - \sqrt{15}\right) = \ln\left(4 - \sqrt{15}\right) + i\,(2k\pi) \end{aligned}$$

Entonces dividiendo por i

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{i}\ln\left(4 + \sqrt{15}\right) + (2k\pi) = -i\ln\left(4 + \sqrt{15}\right) + (2k\pi) \\ z_2 &= \frac{1}{i}\ln\left(4 - \sqrt{15}\right) + (2k\pi) = -i\ln\left(4 - \sqrt{15}\right) + (2k\pi) \end{aligned}$$

2. **Calcula las siguientes integrales**

$a)$ **(1.25 puntos)** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\,\mathrm{sen}\,(t))^2} dt$ $\qquad$ $b)$ **(1.5 puntos)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$

Solución:

(a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\,\mathrm{sen}\,(t))^2} dt$ es una integral del tipo trigonométrica que se resuelve por el cambio correspondiente

$$\mathrm{sen}\,(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \Rightarrow \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \qquad dt \Rightarrow \frac{1}{iz} dz$$

Para obtener

$$\int_\gamma \frac{1}{\left(5-3\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)\right)^2}\frac{1}{iz}dz$$

siendo

$$\gamma=\gamma\left(t\right)=e^{it}\qquad t\in[0,2\pi]$$

Desarrollando tendremos

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{\left(5-\frac{3z^2-3}{2iz}\right)^2}\frac{1}{iz}dz &= \int_\gamma \frac{1}{\left(\frac{10iz-(3z^2-3)}{2iz}\right)^2}\frac{1}{iz}dz\\ &= \int_\gamma \frac{(2iz)^2}{(10iz-(3z^2-3))^2}\frac{1}{iz}dz\\ &= \int_\gamma \frac{4\left(iz\right)}{(10iz-3z^2+3)^2}dz\end{aligned}$$

El polinomio del denominador

$$\left(10iz-3z^2+3\right)$$

puede descomponerse sacando las raíces correspondientes

$$-3z^2+10iz+3=0\Leftrightarrow z=\frac{-10i\pm\sqrt{(10i)^2+36}}{-6}=\frac{-10i\pm\sqrt{-100+36}}{-6}=\frac{-10i\pm 8i}{-6}$$

Y las raíces son

$$\begin{aligned}z_1 &= 3i\\ z_2 &= \frac{1}{3}i\end{aligned}$$

El polinomio puede factorizarse como

$$\left(10iz-3z^2+3\right)=-3\left(z-3i\right)\left(z-\frac{1}{3}i\right)$$

Observamos que el factor -3 aparece porque el coeficiente principal del polinomio no es unitario.

La integral se puede expresar como

$$4\int_\gamma \frac{(iz)}{(10iz-3z^2+3)^2}dz=4\int_\gamma \frac{(iz)}{\left(-3\left(z-3i\right)\left(z-\frac{1}{3}i\right)\right)^2}dz=\frac{4i}{9}\int_\gamma \frac{z}{(z-3i)^2\left(z-\frac{1}{3}i\right)^2}dz$$

La integral se calcula aplicando el teorema de los residuos. Para ello necesitamos los residuos de aquellas singularidades que están dentro del círculo unidad, en este caso solamente $z_2 = \frac{1}{3}i$.

$$\frac{4i}{9}\int_{\gamma}\frac{z}{(z-3i)^2\left(z-\frac{1}{3}i\right)^2}dz = \frac{4i}{9}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z-3i)^2\left(z-\frac{1}{3}i\right)^2},\frac{1}{3}i\right)$$

La singularidad $\frac{1}{3}i$ es un polo doble de la función del integrando, luego

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z-3i)^2\left(z-\frac{1}{3}i\right)^2},\frac{1}{3}i\right) = \frac{\phi'\left(\frac{1}{3}i\right)}{1!} = \phi'\left(\frac{1}{3}i\right)$$

siendo

$$\phi(z) = \frac{z}{(z-3i)^2}$$

Derivando

$$\phi'(z) = \frac{(z-3i)^2 - 2(z-3i)z}{(z-3i)^4} = -\frac{(z+3i)}{(z-3i)^3}$$

y evaluando en $z_2 = \frac{1}{3}i$ para obtener el residuo

$$\phi'\left(\frac{1}{3}i\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}i-3i\right) - 2 * \frac{1}{3}i}{\left(\frac{1}{3}i-3i\right)^3} = -\frac{45}{256}$$

La integral vale

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(5-3\,\mathrm{sen}\,(t))^2}dt = \frac{4i}{9}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z-3i)^2\left(z-\frac{1}{3}i\right)^2},\frac{1}{3}i\right) = \left(-\frac{8\pi}{9}\right)\left(-\frac{45}{256}\right) = \frac{5}{32}\pi$$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$, integral de tipo I donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional, con $\partial p + 2 \leq \partial q$ y sin polos reales. Utilizamos la fórmula correspondiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx = 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0}\mathrm{Res}\left(H(z), z_k\right)$$

con

$$H(z) = \frac{z^2}{z^4+z^2+1}$$

Tenemos que descomponer el denominador en factores para localizar las singularidades. Es fácil comprobar que que se trata de una ecuación bicuadrática, que se transforma en una ecuación de segundo grado mediante el cambio $z^2 = t$ (por tanto $z = \sqrt{t}$)

$$z^4 + z^2 + 1 = t^2 + t + 1$$

Hallamos el valor de t de forma usual

$$t^2+t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y tendremos dos soluciones para t

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ t_2 &= \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener las raíces del polinomio original teniendo en cuenta el cambio de variable entre z y t

$$z=\pm\sqrt{t}=\pm\sqrt{\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

lo que proporciona las cuatro raíces que tiene el polinomio de cuarto grado.
Para hallar las raíces cuadradas ponemos los complejos en forma polar

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1_{2\pi/3} \\ t_2 &= \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1_{4\pi/3} \end{aligned}$$

al tomar raíces cuadradas

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{t_1}=1_{2\pi/6}=\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 &= -\sqrt{t_1}=1_{8\pi/6}=\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 &= \sqrt{t_2}=1_{4\pi/6}=\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_4 &= -\sqrt{t_2}=1_{10\pi/6}=\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{10\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

De las cuatro singularidades anteriores, solamente z_1 y z_3 contribuyen al cálculo de la integral, puesto que son las únicas con parte imaginaria positiva. El cálculo de los residuos es muy sencillo, teniendo en cuenta que $H(z)$ es de la forma

$$H(z)=\frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

y que z_k son polos simples

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(H(z), z_1) &= \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \\
\frac{\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{\left(1 + \sqrt{3} i\right)\left(i\sqrt{3}\right)} &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(H(z), z_3) &= \frac{z_3^2}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}{(-1)\, i\sqrt{3}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} i
\end{aligned}$$

y la integral es

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}(H(z), z_k) \\
&= 2\pi i \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} i \right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} i \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi
\end{aligned}$$

3. **(1.25 puntos) Calcula la siguiente integral**

$$\int_\gamma (\overline{z} + \cos z)\; dz$$

siendo $\gamma(t)$ **el segmento que une los números complejos** $z_1 = 1 + i$ **y** $z_2 = 2 - i$.

Solución: En primer lugar, observamos que mientras que la función $\overline{z}$ no es derivable en ningún punto y por tanto no tiene primitiva, la función $\cos(z)$ tiene como primitiva a $\operatorname{sen}(z)$. Por otra parte utilizamos la propiedad de linealidad de la integral a lo largo de un camino para separar la integral en una suma de integrales:

$$\int_\gamma (\overline{z} + \cos z)\; dz = \int_\gamma \overline{z}\, dz + \int_\gamma \cos z\, dz$$

Es posible obtener rápidamente el valor de las segunda integral utilizando la primitiva de la función, ya que no depende del camino elegido, sólo de los puntos inicial y final:

$$\int_\gamma \cos z\, dz = \int_{1+i}^{2-i} \cos(z)\, dz = \operatorname{sen} z\Big|_{z=1+i}^{2-i} = \operatorname{sen}(2 - i) - \operatorname{sen}(1 + i)$$

Sin embargo, para la otra tendremos que utilizar la definición de integral a lo largo de un camino:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

siendo $\gamma(t)$ una parametrización de la curva, que en nuestro caso es el segmento que une z_1 con z_2.

El segmento lineal que une dos complejos z_1 y z_2 puede parametrizarse de forma simple como

$$\gamma(t) = (1-t)\,z_1 + t z_2 \quad t \in [0,1]$$

que en nuestro caso

$$\gamma(t) = (1-t)(1+i) + t(2-i) = (1+t) + i(1-2t) \quad t \in [0,1]$$

con

$$\gamma'(t) = 1 - 2i \quad t \in [0,1]$$

Si se sustituyen estos valores en la integral

$$\int_\gamma \overline{z}\,dz = \int_0^1 \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \overline{(1+t)+i(1-2t)}\,(1-2i)\,dt$$

$$\begin{aligned}
(1-2i)\int_0^1 (1+t) - i(1-2t)\,dt &= (1-2i)\left.\frac{(1+t)^2}{2} + i\frac{(1-2t)^2}{4}\right|_0^1 = \\
&= (1-2i)\left\{\left(2 + i\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{4}\right)\right\} \\
&= (1-2i)\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - 3i
\end{aligned}$$

La integral pedida es la suma de ambas

$$\int_\gamma (\overline{z} + \cos z)\ dz = \int_\gamma \overline{z}\,dz + \int_\gamma \cos z\,dz = \left(\frac{3}{2} - 3i\right) + (\operatorname{sen}(2-i) - \operatorname{sen}(1+i))$$

4. **(1.5 puntos) Resuelve la siguiente ecuación diferencial**

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t)$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 1$$

Solución: Utilizaremos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(y''(t) + 2y'(t) + 5y(t)) = \mathcal{L}(f(t))$$

Para la primera parte de la ecuación empleamos las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y''(t)+2y'(t)+5y(t)\right) &= \mathcal{L}\left(y''(t)\right)+2\mathcal{L}\left(y'(t)\right)+5\mathcal{L}\left(y(t)\right) \\
&= \left(z^2\mathcal{L}\left(y(t)\right)-zy(0)-y'(0)\right)+2\left(z\mathcal{L}\left(y(t)\right)-y(0)\right)+5\mathcal{L}\left(y(t)\right) \\
&= z^2\mathcal{L}\left(y(t)\right)-1+2z\mathcal{L}\left(y(t)\right)+5\mathcal{L}\left(y(t)\right) \\
&= \left(z^2+2z+5\right)\mathcal{L}\left(y(t)\right)-1
\end{aligned}$$

Calcularemos ahora la transformada de Laplace de $f(t)$. De la definición de transformada de Laplace de una función obtenemos

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z)=\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt=\int_0^1 e^{-zt}dt=-\left.\frac{e^{-zt}}{z}\right|_0^1=\frac{1}{z}-\frac{e^{-z}}{z}$$

Por tanto debe ocurrir

$$\left(z^2+2z+5\right)\mathcal{L}\left(y(t)\right)-1=\frac{1}{z}-\frac{e^{-z}}{z}$$

de donde

$$\mathcal{L}\left(y(t)\right)=\frac{1}{z^2+2z+5}\left(1+\frac{1}{z}-\frac{e^{-z}}{z}\right)=\frac{z+1-e^{-z}}{z\left(z^2+2z+5\right)}$$

Para hallar $y(t)$ tenemos que tomar la transformada inversa en ambos lados

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z+1-e^{-z}}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)$$

Para el cálculo de esta transfomada inversa utilizamos la fórmula de inversión con residuos, previamente, utilizaremos sus propiedad de linealidad, para obtener:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z+1-e^{-z}}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2+2z+5}\right)(t)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)
\end{aligned}$$

además teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t-1)\qquad t\geq 1$$

solamente será necesario calcular dos de los sumandos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2+2z+5}\right)(t) \tag{3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t) \tag{4}$$

Para el cálculo de 3 tenemos 2 singularidades

$$z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i \Rightarrow \begin{cases} z_1=-1+2i \\ z_2=-1-2i \end{cases}$$

y por tanto

$$\left(z^2+2z+5\right)=(z-z_1)(z-z_2)$$

Los residuos buscados serán

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}e^{zt}, z_1\right) &= \frac{e^{z_1 t}}{z_1-z_2} \\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+2z+5}e^{zt}, -1+2i\right) &= \frac{e^{z_2 t}}{z_2-z_1} \end{aligned}$$

y para la primera transformada tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2+2z+5}\right) &= \frac{e^{z_1 t}}{z_1-z_2}+\frac{e^{z_2 t}}{z_2-z_1}=\frac{1}{z_1-z_2}\left(e^{z_1 t}-e^{z_2 t}\right)=\frac{1}{4i}\left(e^{(-1+2i)t}-e^{(-1-2i)t}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-t}\frac{\left(e^{2ti}-e^{-2it}\right)}{2i}=\frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

Para calcular 4, además de z_1 y z_2, hay que añadir la singularidad $z_0=0$

El cálculo de los residuos nos da:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z^2+2z+5)}e^{zt}, 0\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}/(z^2+2z+5)}{z}, 0\right)=\tfrac{1}{5}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z^2+2z+5)}e^{zt}, z_1\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}/z(z-z_2)}{z-z_1}, 0\right)=\frac{1}{z_1}\frac{e^{z_1 t}}{z_1-z_2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z^2+2z+5)}e^{zt}, z_2\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}/z(z-z_1)}{z-z_2}, 0\right)=\frac{1}{z_2}\frac{e^{z_2 t}}{z_2-z_1}$$

Sumando los tres residuos tendremos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z(z^2+2z+5)}\right)(t)=\frac{1}{5}+\frac{1}{z_1}\frac{e^{z_1 t}}{z_1-z_2}+\frac{1}{z_2}\frac{e^{z_2 t}}{z_2-z_1}=\frac{1}{5}+\frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{e^{z_1 t}}{z_1}-\frac{e^{z_2 t}}{z_2}\right)$$

Sustituyendo z_1 y z_2

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z(z^2+2z+5)}\right)(t) &= \frac{1}{5}+\frac{1}{4i}\left(\frac{e^{(-1+2i)t}}{(-1+2i)}-\frac{e^{(-1-2i)t}}{(-1-2i)}\right) \\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{4i}\left(\frac{e^{-t}e^{i2t}}{(-1+2i)}-\frac{e^{-t}e^{-i2t}}{(-1-2i)}\right) \end{aligned}$$

sacamos factor común e^{-t}

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\frac{1}{5}+\frac{e^{-t}}{4i}\left(\frac{e^{i2t}}{(-1+2i)}-\frac{e^{-i2t}}{(-1-2i)}\right)$$

y hacemos la suma dentro del paréntesis

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\frac{1}{5}+\frac{e^{-t}}{4i}\left(\frac{(-1-2i)\,e^{i2t}-(-1+2i)\,e^{-i2t}}{(-1+2i)\,(-1-2i)}\right)$$

operando

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\frac{1}{5}+\frac{e^{-t}}{4i}\left(\frac{-e^{i2t}-2ie^{i2t}+e^{-i2t}-2ie^{-i2t}}{5}\right)$$

agrupamos para obtener

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\frac{1}{5}+\frac{e^{-t}}{4i}\left(\frac{-\left(e^{i2t}-e^{-i2t}\right)}{5}+\frac{-2i\left(e^{i2t}+e^{-i2t}\right)}{5}\right)$$

y recordando las definiciones de $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\frac{1}{5}+\frac{e^{-t}}{4i}\left(\frac{-2i\operatorname{sen}(2t)}{5}+\frac{-2i\cdot(2\cos(t))}{5}\right)$$

y se simplifica el resultado

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\frac{1}{5}-e^{-t}\left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{10}+\frac{\cos(2t)}{5}\right)$$

Como se ha comentado antes, para el último término tendremos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)(t-1)\qquad t\geq 1$$

luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{z\left(z^2+2z+5\right)}\right)=\frac{1}{5}-e^{-(t-1)}\left(\frac{\operatorname{sen}(2t-2)}{10}+\frac{\cos(2t-2)}{5}\right)\qquad t>1$$

La función buscada será sumando las correspondientes expresiones la siguiente:

$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(2t)+\frac{1}{5}-e^{-t}\left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{10}+\frac{\cos(2t)}{5}\right) & 0<t<1\\[2em] \begin{array}{c}\frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(2t)-e^{-t}\left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{10}+\frac{\cos(2t)}{5}\right)\\ +\frac{e^{-(t-1)}}{10}\left(\operatorname{sen}(2t-2)+2\cos(2t-2)\right)\end{array} & t>1\end{cases}$$

Aunque no es necesario las expresiones anteiores pueden simplificarse, y la expresión para $y(t)$ resulta

$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{5}+\frac{e^{-t}}{5}\left(2\operatorname{sen}(2t)-\cos(2t)\right) & 0<t<1\\[2em] \frac{e^{-t}}{5}\left(2\operatorname{sen}(2t)-\cos(2t)\right)+\frac{e^{-(t-1)}}{10}\left(\operatorname{sen}(2t-2)+2\cos(2t-2)\right) & t>1\end{cases}$$

5. **(1.5 puntos) Construye la serie de Laurent de la función:**

$$f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$$

en $z_0 = 2$.

Solución: Para encontrar la serie de Laurent de esta función, en primer lugar dividimos el numerador entre el denominador para obtener

$$\frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = 1 - \frac{4}{(z-2)^2}$$

Observa que se obtiene el mismo resultado si completamos el trinomio cuadrado perfecto del numerador

$$\frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = \frac{z^2 - 4z + 4 - 4}{(z-2)^2} = \frac{(z-2)^2 - 4}{(z-2)^2} = 1 - \frac{4}{(z-2)^2}$$

por tanto la función puede expresarse como

$$\cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = \cos \left(1 - \frac{4}{(z-2)^2}\right)$$

A continuación utilizamos la relación trigonométrica del coseno de una diferencia para poner

$$\cos \left(1 - \frac{4}{(z-2)^2}\right) = \cos (1) \cos \left(\frac{4}{(z-2)^2}\right) + \operatorname{sen} (1) \operatorname{sen} \left(\frac{4}{(z-2)^2}\right)$$

Podemos ahora emplear el desarrollo de las funciones $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ para obtener:

$$\cos \left(1 - \frac{4}{(z-2)^2}\right) = \cos (1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{4}{(z-2)^2}\right)^{2n} + \operatorname{sen} (1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{4}{(z-2)^2}\right)^{2n+1}$$

que puede expresarse como

$$\cos (1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^{2n} \frac{1}{(z-2)^{4n}} + \operatorname{sen} (1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 4^{2n+1} \frac{1}{(z-2)^{4n+2}}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.