Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica

Examen de operaciones básicas, 30 de enero de 2006

1. **Calcula en radianes el argumento de** $1 - i\sqrt{3}$.

   Solución: El número complejo $1 - i\sqrt{3}$ está situado en el cuarto cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

   $$\varphi = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

   Y sabiendo que

   $$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

   y que

   $$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

   entonces

   $$\varphi \in -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

2. **Calcula el inverso de** $6 + 4i$ **en forma binómica.**

   Solución: El inverso z^{-1} de un número complejo z está definido como

   $$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

   con esta definición podemos poner

   $$z^{-1} = \frac{1}{6+4i} = \frac{(6-4i)}{(6+4i)(6-4i)} = \frac{6-4i}{6^2+4^2} = \frac{6-4i}{52} = \frac{6}{52} - \frac{4}{52}i = \frac{3}{26} - \frac{1}{13}i$$

3. **Calcula el módulo de** $\frac{(1+5i)}{i(2+3i)}$.

   Solución: Utilizando las propiedades del módulo

   $$\left|\frac{(1+5i)}{i(2+3i)}\right| = \frac{|(1+5i)|}{|i|\,|(2+3i)|} = \frac{\sqrt{1^2+5^2}}{1\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2*13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{2}$$

4. **Calcula** $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$, **expresando el resultado en forma binómica.**

   Solución: Podemos utilizar la expresión en módulo y argumento del número complejo para encontrar el valor de esta potencia. Como estamos en el primer cuadrante

   $$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \\ \left|\sqrt{3}+i\right| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2 \end{aligned}$$

Luego la expresión en módulo y argumento de este complejo es

$$2_{\pi/6}$$

Si utilizamos las propiedades de las potencias enteras de números complejos, al elevar al cubo

$$2^3_{3\pi/6} = 2^3_{\pi/2} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 8i$$

También es posible encontrar la solución utilizando la expresión del binomio de Newton

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^3 &= \binom{3}{0}\left(\sqrt{3}\right)^0 i^3 + \binom{3}{1}\left(\sqrt{3}\right)^1 i^2 + \binom{3}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 i^1 + \binom{3}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 i^0 \\ &= -i - 3\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3} = 8i\end{aligned}$$

5. **Calcula $\sqrt[4]{1}$ y escribe el resultado en forma binómica**

   Solución: En forma polar, el número complejo 1 puede ponerse como

$$1_0$$

   luego las raíces cuartas 1 serán

$$1^{1/4}_{\frac{0+2k\pi}{4}} = \begin{cases} 1^{1/4}_0 & = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0 \quad k=0 \\ 1^{1/4}_{(0+2\pi)/4} & = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} \quad k=1 \\ 1^{1/4}_{(0+4\pi)/4} & = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi \quad k=2 \\ 1^{1/4}_{(0+6\pi)/4} & = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} \quad k=3 \end{cases}$$

   que en forma binómica son

$$\begin{aligned} 1^{1/4}_0 &= 1 + i\cdot 0 = 1 & k=0 \\ 1^{1/4}_{(0+2\pi)/4} &= 0 + i\cdot 1 = i & k=1 \\ 1^{1/4}_{(0+4\pi)/4} &= -1 + i\cdot 0 = -1 & k=2 \\ 1^{1/4}_{(0+6\pi)/4} &= 0 + i\cdot(-1) = -i & k=3 \end{aligned}$$

6. **Calcula $\dfrac{(1+i)}{(3+8i)}$ en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador tendremos

$$\frac{1+i}{3+8i} = \frac{(1+i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)} = \frac{(3+8)+i(-8+3)}{3^2+8^2} = \frac{11-5i}{73} = \frac{11}{73} - i\frac{5}{73}$$

7. **Expresa $2+2i$ en forma exponencial, expresando el ángulo en radianes**

   Solución: El argumento φ del número $2+2i$, que se encuentra en el primer cuadrante, se calcula como
$$\varphi = \arctan\frac{2}{2} = \arctan 1 = \pi/4$$
   Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como
$$2+2i = |2+2i|e^{i\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

8. **Expresa $\dfrac{(2i^{34}-i^{40})}{(3i^{30}-i^{19})}$ en forma binómica.**

   Solución: Expresamos las potencias de i en módulo 4:
$$\frac{(2i^{34}-i^{40})}{(3i^{30}-i^{19})} = \frac{2i^{4*8+2}-i^{4*10}}{3i^{4*7+2}-i^{4*4+3}} = \frac{2i^2-1}{3i^2-i^3} = \frac{-2-1}{-3+i} = \frac{-3}{-3+i} = \frac{9}{10}+i\frac{3}{10}$$

9. **Calcula $\dfrac{(1+i)}{(1+i\sqrt{3})}$ en forma modulo-argumental, expresando el ángulo en radianes.**

   Solución: En primer lugar ponemos cada uno de los números en forma modulo-argumental
$$\begin{aligned}(1+i) &= \sqrt{2}_{\pi/4}\\ \left(1+i\sqrt{3}\right) &= 2_{\pi/3}\end{aligned}$$
   y ahora hacemos la división
$$\frac{(1+i)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{2_{\pi/3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\pi/4-\pi/3} = \left(\sqrt{2}\right)_{-\pi/12} = \sqrt{2}e^{-i\pi/12}$$

10. **Calcula** $(2+5i)\cdot(2-4i)$

    Solución: Multiplicando elemento a elemento
$$(2+5i)\cdot(2-4i) = 4-8i+10i-20i^2 = 24+2i$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 30 de enero de 2006

1. **Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:**

   (a) **(1 punto) Resuelve la siguiente ecuación:** $2\,\text{sen}\,(z) - i\cos(z) = i$
   Solución: Utilizando las definiciones de $\cos(z)$ y $\text{sen}\,(z)$

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ \text{sen}\,(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\end{aligned}$$

la ecuación queda

$$2\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) - i\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = i$$

multiplicamos por i

$$2i\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = -1$$

operando

$$e^{iz} - e^{-iz} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = -1$$

multiplicando por 2

$$\begin{aligned}2e^{iz} - 2e^{-iz} + e^{iz} + e^{-iz} &= -2\\ 3e^{iz} - e^{-iz} &= -2\end{aligned}$$

Si llamamos

$$e^{iz} = \omega \Rightarrow e^{-iz} = \frac{1}{\omega}$$

tendremos, puesto que $\omega \neq 0$

$$3\omega - \frac{1}{\omega} = -2$$

y multiplicando por ω obtenemos la ecuación

$$3\omega^2 - 1 = -2\omega \Leftrightarrow 3\omega^2 + 2\omega - 1 = 0$$

Ecuación de segundo grado que se resuelve mediante la fórmula correspondiente

$$\omega = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 + 4*3}}{2*3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= -1 \\
\omega_2 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Como $e^{iz} = \omega$ tendremos

$$
\begin{aligned}
e^{iz_1} &= 1 \Leftrightarrow iz_1 = L(1) = \ln(1) + i(2\pi k) \Longleftrightarrow z_1 = (2\pi k) \\
e^{iz_2} &= -\frac{1}{3} \Leftrightarrow iz_2 = L\left(-\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) + i(\pi + 2\pi k) \Longleftrightarrow z_2 = -i\ln(3) - (\pi + 2\pi k)
\end{aligned}
$$

(b) **(1 punto) Encuentra todas las funciones analíticas** $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ **con**

$$u(x,y) = y^3 + ax^2y \qquad a \in \mathbb{R}$$

Solución: Como se dice que $f(x,y)$ es analítica, su parte real $u(x,y)$ debe ser una función armónica y cumplirá la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

Derivando $u(x,y)$ respecto x e y, una vez

$$
\begin{aligned}
u_x &= 2axy \\
u_y &= 3y^2 + ax^2
\end{aligned}
$$

y otra

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= 2ay \\
u_{yy} &= 6y
\end{aligned}
$$

Al sustituir en 1 se obtiene

$$6y + 2ay = 0 \Leftrightarrow (6 + 2a)\,y = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

luego $u(x,y)$ debe ser de la forma

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y$$

Para el cálculo de la parte imaginaria de $f(x,y)$ (función $v(x,y)$), tenemos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, utilizando de nuevo que $f(x,y)$ es analítica.

$$
\begin{aligned}
u_x &= v_y \\
u_y &= -v_x
\end{aligned}
$$

Utilizando la primera de estas ecuaciones

$$u_x = v_y \Leftrightarrow -6xy = v_y$$

e integrando respecto a y obtenemos la siguiente expresión para $v(x,y)$

$$v = \int -6xydy = -\frac{6xy^2}{2} + \varphi(x) = -3xy^2 + \varphi(x)$$

Para encontrar la función $\varphi(x)$ derivamos respecto de x

$$v_x = -3y^2 + \varphi'(x)$$

expresión que debe coincidir con $-u_y = -3y^2 + 3x^2$, gracias a la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto

$$-3y^2 + \varphi'(x) = -3y^2 + 3x^2$$

de donde

$$\varphi'(x) = 3x^2$$

e integrando se obtiene

$$\varphi(x) = x^3 + c \in \mathbb{R}$$

Finalmente la expresión para $v(x,y)$ es:

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c$$

y $f(x,y)$ es de la forma

$$f(x,y) = \left(y^3 - 3x^2y\right) + i\left(x^3 - 3xy^2 + c\right)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f(x,y)$ como una función de z

$$f(z) = i\left(z^3 + c\right)$$

2. **Calcula las siguientes integrales**

   a) **(1.25 puntos)** $\int_0^{2\pi} \frac{2\operatorname{sen}(t)\cos(t)}{5-4\cos(t)}dt$ *b*) **(1.25 puntos)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(2x)}{x^4+1}dx$

   Solución:

   (a) Este apartado se puede resolver de dos formas. En la primera de ellas, a partir de la integral

   $$\int_0^{2\pi} \frac{2\operatorname{sen}(t)\cos(t)}{5-4\cos(t)}dt$$

   se hace el cambio

   $$\cos(t) = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$dt = \frac{1}{iz} dz$$

para obtener la integral

$$\int_\gamma \frac{2\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}{5 - 4 * \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{1}{iz} dz$$

siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ la circunferencia unidad.
Realizando las operaciones correspondientes se obtiene

$$\int_\gamma \frac{2\left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right) z}{4z^2 i\left(5z - 2z^2 - 2\right)} \frac{1}{iz} dz$$

Y simplificando

$$\int_\gamma \frac{\left(z^4 - 1\right)}{2z^2\left(2z^2 - 5z + 2\right)} dz$$

Ahora bien

$$2z^2 - 5z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = 2 \text{ o } z = 1/2$$

y el denominador puede ponerse como

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)}{5 - 4\cos(t)} dt = \int_\gamma \frac{\left(z^4 - 1\right)}{4z^2(z - 2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} dz \qquad (2)$$

Para el cálculo de esta integral, podemos emplear el teorema de los residuos, utilizando solamente los residuos de las singularidades que estén dentro del círculo unidad

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \text{ que es un polo doble} \\ z_1 &= \frac{1}{2} \text{ que es un polo simple} \end{aligned}$$

mientras que $z_2 = 2$, no está dentro del círculo unidad y no será considerado para el cálculo de la integral.
La integral en términos de los residuos es

$$\int_\gamma \frac{\left(z^4 - 1\right)}{4z^2(z - 2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} dz = 2\pi i \left\{\operatorname{Res}(f(z), z_0) + \operatorname{Res}(f(z), z_1)\right\}$$

El cálculo de residuos es muy sencillo. Para $z_0 = 0$, que es un polo doble

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \frac{\varphi_0'(0)}{1!}$$

siendo

$$\varphi_0(z) = \frac{\left(z^4 - 1\right)}{4(z - 2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

derivando $\varphi_0(z)$

$$\varphi_0'(z) = \frac{4z^3\left(4(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)\right) - (z^4-1)\left(4\left(z-\frac{1}{2}\right)+4(z-2)\right)}{\left(4(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

y evaluando en $z=0$

$$\varphi_0'(0) = \frac{4*0^3\left(4(0-2)\left(0-\frac{1}{2}\right)\right) - (0^4-1)\left(4\left(0-\frac{1}{2}\right)+4(0-2)\right)}{\left(4(0-2)\left(0-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = -\frac{5}{8}$$

En $z_1 = \frac{1}{2}$, la función tiene un polo simple y entonces

$$\mathrm{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right) = \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

siendo $\varphi_1(x)$ la función

$$\varphi_1(z) = \frac{(z^4-1)}{4z^2(z-2)}$$

que evaluamos en $z_1 = \frac{1}{2}$ para obtener el residuo de $f(z)$

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4-1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-2\right)} = \frac{5}{8}$$

Utilizando la información anterior el valor de la integral es

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)}{5-4\cos(t)} &= \int_\gamma \frac{(z^4-1)}{4z^2(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(f(z), z_0\right) + \mathrm{Res}\left(f(z), z_1\right)\right) \\ &= 2\pi i\left(-\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\right) = 2\pi i(0) = 0\end{aligned}$$

<u>Solución 2:</u> Otra forma de obtener el valor de la integral es por una parte utilizar relaciones trigonométricas conocidas para transformar el numerador de la función

$$2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) = \mathrm{sen}(2t)$$

y después utilizar la fórmula de Euler

$$\mathrm{sen}(2t) = \frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i} = \frac{e^{i2t}-\frac{1}{e^{i2t}}}{2i} = \frac{e^{i4t}-1}{2ie^{i2t}} = \frac{\left(e^{it}\right)^4-1}{2i\left(e^{it}\right)^2}$$

El cambio es entonces

$$\mathrm{sen}(2t) = \frac{z^4-1}{2iz^2}$$

$$\cos(t) = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$dt = \frac{1}{iz}dz$$

La integral se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\,\mathrm{sen}\,(t)\cos(t)}{5-4\cos(t)}dt = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{5-4\cos(t)}dt = \int_\gamma \frac{\frac{z^4-1}{2iz^2}}{5-4*\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{iz}dz$$

que al operar nos da la integral dada en 2 y que resolvemos como antes.

(b) Para obtener el valor de esta integral hay que tener en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(2x)}{x^4+1}dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^4+1}dx\right)$$

Y la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^4+1}dx$$

la podremos calcular mediante residuos; necesitamos para ello encontrar las soluciones de la ecuación

$$z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4=-1$$

es decir buscamos las raíces cuartas de -1. Podemos obtener fácilmente estas raíces utilizando la forma polar del complejo -1

$$-1 = 1_\pi$$

por tanto las raíces buscadas son

$$\begin{aligned}
k=0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 = 1_{\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) &&= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
k=1 \quad &\Rightarrow \quad z_0 = 1_{3\pi/4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) &&= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
k=2 \quad &\Rightarrow \quad z_0 = 1_{5\pi/4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) &&= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
k=4 \quad &\Rightarrow \quad z_0 = 1_{7\pi/4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) &&= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Solamente necesitamos el residuo en $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, puesto que tanto $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ como $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ tienen parte imaginaria negativa. Con estos datos la integral es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^4+1}dx = 2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left(f(z), \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

siendo

$$f\left(z\right)=\frac{ze^{i2z}}{z^{4}+1}$$

Como tanto z_0 como z_1 son polos simples podemos calcularlo de forma sencilla. Para z_0 tendremos

$$\operatorname{Res}\left(f\left(z\right),\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\varphi_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

siendo

$$\varphi_1\left(z\right)=\frac{ze^{i2z}}{\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)}$$

por tanto

$$\varphi_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{\left[\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right]\left[i\sqrt{2}\right]}=\frac{1}{4i}e^{i\sqrt{2}(1+i)}=\frac{1}{4i}e^{i\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}$$

Mientras que para z_1
y la integral es

$$\operatorname{Res}\left(f\left(z\right),-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\varphi_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

siendo

$$\varphi_2\left(z\right)=\frac{ze^{i2z}}{\left(z-z_0\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)}$$

por tanto

$$\varphi_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{\left[-\sqrt{2}\right]\left[i\sqrt{2}\right]\left[-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right]}=\frac{1}{-4i}e^{i\sqrt{2}(-1+i)}=-\frac{1}{4i}e^{-i\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}$$

Sumando ambos residuos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^{4}+1}dx &= 2\pi i\left(\frac{1}{4i}e^{i\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}-\frac{1}{4i}e^{-i\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}}\right)\\ &= \pi ie^{-\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2i}e^{i\sqrt{2}}-\frac{1}{2i}e^{-i\sqrt{2}}\right)=i\pi e^{-\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Por último la integral pedida es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\left(2x\right)}{x^{2}+1}dx=\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^{4}+1}dx\right)=\operatorname{Re}\left(i\pi e^{-\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)\right)=0$$

Notar que al ser una función impar ($f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$) la integral vale directamente 0.

3. **Calcula $\int_\gamma f(z)\,dz$ en función de r, a lo largo de $\gamma(t) = re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, para cada una de las siguientes expresiones de $f(z)$**

   a) **(1.25 puntos)** $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ *b*) **(1.25 puntos)** $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$

Solución:

(a) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$. La función $f(z)$ tiene 4 singularidades aisladas $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$ que son todas de tipo polo de orden 1, es decir, polos simples. Dependiendo del radio r, la circunferencia $\gamma(t) = re^{it}$ contendrá o bien ninguna singularidad si $r < 1$, o bien 2 singularidades z_1 y z_2 si $1 < r < 2$, o bien las cuatro singularidades si $r > 2$. En los casos $r = 1$ o $r = 2$, la curva pasará por singularidades y no será posible calcular la integral. Distinguiremos pues esos casos, calculando previamente el residuo de $f(z)$ en cada singularidad:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z), i) &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{6}i \\
\operatorname{Res}(f(z), -i) &= \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z^2+4)} = -\frac{1}{6}i \\
\operatorname{Res}(f(z), 2i) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = -\frac{1}{3}i \\
\operatorname{Res}(f(z), -2i) &= \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to -2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2i)} = \frac{1}{3}i
\end{aligned}$$

- Si $r < 1$, no hay singularidades dentro de la semicircunferencia y entonces

  $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

  Si $1 < r < 2$, estarán dentro de la curva las singularidades $z_1 = i$ y $z_2 = -i$, entonces

  $$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i)] = 2\pi i\left[\frac{1}{6}i - \frac{1}{6}i\right] = 0$$

- Si $r > 2$, todas las singularidades estarán dentro de la semicircunferencia y se tiene entonces que

  $$\begin{aligned}
  \int_\gamma f(z)\,dz &= 2\pi i[\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i) + \operatorname{Res}(f,2i) + \operatorname{Res}(f,-2i)] \\
  &= 2\pi i\left(\frac{1}{6}i - \frac{1}{6}i - \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}i\right) = 0
  \end{aligned}$$

- Si $r = 1$ ó $r = 2$, la integral no tiene sentido puesto que la curva pasará por una singularidad.

(b) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$. En este caso la única singularidad es $z_1 = 1$, que es esencial. Distinguiremos 2 casos:

- Si $r < 1$, no hay singularidades dentro de la semicircunferencia y entonces
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$
- Si $r > 1$, la curva contiene a la singularidad, que al ser esencial tendremos que calcular su residuo mediante el desarrollo de Laurent en ese punto. Para expresamos $f(z)$ de la siguiente forma
$$\begin{aligned} f(z) &= ze^{\frac{1}{z-1}} = (z-1+1)\, e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1)\, e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-1}} \\ &= (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$
el coeficiente de $(z-1)^{-1}$ lo encontramos en el primer sumando para $n = 2$ y en el segundo para $n = 1$, luego
$$b_1 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$
y la integral en este caso vale
$$\int_\gamma ze^{\frac{1}{z-1}}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 1) = 2\pi i \frac{3}{2} = 3\pi i$$
- Si $r = 1$, la integral no tiene sentido puesto que la curva pasará por la singularidad.

4. **(1.5 puntos) Resuelve la siguiente ecuación diferencial**
$$y''(t) + 4y(t) = \operatorname{sen}(t)$$
junto con las condiciones iniciales
$$y(0) = y'(0) = 0$$

Solución: Utilizando las propiedades de la transformada de Laplace tenemos
$$\left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + 4Y(z) = \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t))(z)$$
además
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t))(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \operatorname{sen}(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) dt = \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^\infty e^{-(z-i)t} dt - \int_0^\infty e^{-(z+i)t} \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i}\left\{\left.\frac{-1}{z-i}e^{-(z-i)t}\right|_{t=0}^{t=\infty} - \left.\frac{-1}{z+i}e^{-(z+i)t}\right|_{t=0}^{t=\infty}\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) \\
&= \frac{1}{z^2+1}
\end{aligned}$$

y la ecuación queda

$$\left(z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + 4Y(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

utilizando las condiciones iniciales y despejando $Y(z)$, se obtiene

$$Y(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$$

Podemos ahora utilizar la fórmula de inversión de Bromwich para obtener

$$y(t) = \sum_{z_k} \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(s), z_k\right)$$

en nuestro caso

$$z_1 = 2i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = i \quad z_4 = -i$$

y los residuos son

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), 2i\right) &= \tfrac{1}{(4i)(3i)i}e^{2it} = -\tfrac{1}{12i}e^{i2t} \\
\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), -2i\right) &= \tfrac{1}{(-4i)(-i)(-3i)}e^{-2it} = \tfrac{1}{12i}e^{-i2t} \\
\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), i\right) &= \tfrac{1}{(3i)(-i)(2i)}e^{it} = \tfrac{1}{6i}e^{it} \\
\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), -i\right) &= \tfrac{1}{(i)(-3i)(-2i)}e^{-it} = -\tfrac{1}{6i}e^{-it}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$y(t) = -\frac{1}{12i}e^{i2t} + \frac{1}{12i}e^{-i2t} + \frac{1}{6i}e^{it} - \frac{1}{6i}e^{-it}$$

que debe representarse en forma trigonométrica

$$y(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2t) = \frac{1}{6}\left(2\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(2t)\right)$$

ya que la ecuación diferencial implica a señales reales y la respuesta debe ser real.

5. **(1.5 punto) Construye la serie de Laurent en el anillo $A(0,1,2)$ de la función:**

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

Solución: Buscamos un desarrollo de Laurent de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

donde en este caso $z_0 = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

y también

$$1 < |z| < 2$$

Podemos poner la función $f(z)$ como

$$f(z) = \left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right)$$

y podemos descomponer en fracciones simples la fracción que hay dentro del paréntesis para obtener

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = A\frac{1}{z-1} + B\frac{1}{z-2}$$

Buscaremos el desarrollo de Laurent para cada una de las fracciones teniendo en cuenta el valor de z y utilizando el desarrollo conocido de

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

Como en nuestro caso

$$|z| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1$$

y para este caso

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

por último hay que observar que

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

y por tanto

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

Para la segunda fracción

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

y como

$$|z|<2\Rightarrow\frac{|z|}{2}<1$$

y podemos aplicar el desarrollo de antes para poner

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

El desarrollo para $f(z)$ será

$$f(z)=A\frac{1}{z-1}+B\frac{1}{z-2}=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{B}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

Falta por calcular los valores de A y B

$$\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)}=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}A+B&=1\\-2A-B&=0\end{aligned}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{aligned}A&=-1\\B&=2\end{aligned}$$

El desarrollo pedido será

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.