Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica

Examen de operaciones básicas, 2 de septiembre de 2005

1. **Calcula en radianes el argumento que $\sqrt{3}-i$ tiene en el intervalo** $[0,2\pi[$

   Solución: El número complejo $\sqrt{3}-i$ está situado en el cuarto cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

$$\varphi = \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

   Y sabiendo que

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   y que

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

   entonces

$$\varphi \in -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

   como buscamos el argumento que se encuentra en el $[0,2\pi]$, tomamos $k=1$, para obtener

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

2. **Calcula el inverso de $4+6i$ en forma binómica.**

   Solución: El inverso z^{-1} de un número complejo z está definido como

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

   con esta definición podemos poner

$$z^{-1} = \frac{1}{4+6i} = \frac{(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{4-6i}{4^2+6^2} = \frac{4-6i}{52} = \frac{4}{52} - \frac{6}{52}i = \frac{1}{13} - \frac{3}{26}i$$

3. **Calcula el módulo de** $\dfrac{i(2+3i)}{(1+5i)}$.

   Solución: Utilizando las propiedades del módulo

$$\left|\frac{i(2+3i)}{(1+5i)}\right| = \frac{|i|\,|(2+3i)|}{|(1+5i)|} = \frac{1\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)}{\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2*13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. **Calcula $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$, expresando el resultado en forma binómica.**

   Solución: Podemos utilizar la expresión en módulo y argumento del número complejo para encontrar el valor de esta potencia

$$\begin{aligned} \text{Como estamos en el primer cuadrante } \varphi &= \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \\ \left|1+i\sqrt{3}\right| &= \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \end{aligned}$$

   Luego la expresión en módulo y argumento de este complejo es

$$2_{\pi/3}$$

   Si utilizamos las propiedades de las potencias enteras de números complejos, al elevar al cubo

$$2^3_{3\pi/3} = 2^3_{\pi} = 8\left(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi\right) = -8$$

   También es posible encontrar la solución utilizando la expresión del binomio de Newton

$$\begin{aligned} \left(1+i\sqrt{3}\right)^3 &= \binom{3}{0}1^3\left(i\sqrt{3}\right)^0 + \binom{3}{1}1^2\left(i\sqrt{3}\right)^1 + \binom{3}{0}1^1\left(i\sqrt{3}\right)^2 + \binom{3}{0}1^0\left(i\sqrt{3}\right)^3 \\ &= 1+3i\sqrt{3}+3i^2 3 + i^3\left(\sqrt{3}\right)^3 = 1+i3\sqrt{3}-9-i3\sqrt{3} = -8 \end{aligned}$$

5. **Calcula $\sqrt[4]{-1}$ y escribe el resultado en forma binómica**

   Solución: En forma polar, el número complejo -1 puede ponerse como

$$1_{\pi}$$

   luego las raíces cuartas -1 serán

$$1^{1/4}_{\frac{\pi+2k\pi}{4}} = \begin{cases} 1^{1/4}_{\pi/4} & = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \quad k=0 \\ 1^{1/4}_{(\pi+2\pi)/4} & = \cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \quad k=1 \\ 1^{1/4}_{(\pi+4\pi)/4} & = \cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} \quad k=2 \\ 1^{1/4}_{(\pi+6\pi)/4} & = \cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} \quad k=3 \end{cases}$$

   que en forma binómica son

$$\begin{aligned} 1^{1/4}_{\pi/4} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad k=0 \\ 1^{1/4}_{(\pi+2\pi)/4} &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad k=1 \\ 1^{1/4}_{(\pi+4\pi)/4} &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad k=2 \\ 1^{1/4}_{(\pi+6\pi)/4} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad k=3 \end{aligned}$$

6. **Calcula** $\dfrac{3+8i}{1+i}$ **en forma binómica.**

   Solución: Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador tendremos

$$\frac{3+8i}{1+i} = \frac{(3+8i)\,(1-i)}{(1+i)\,(1-i)} = \frac{11+5i}{2} = \frac{11}{2} + i\frac{5}{2}$$

7. **Expresa** $-2-2i$ **en forma exponencial, expresando el ángulo en radianes**

   Solución: El argumento φ del número $-2-2i$, que se encuentra en el tercer cuadrante, se calcula como

$$\varphi = \arctan\frac{-2}{-2} + \pi = \arctan 1 + \pi = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$$

   Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$-2-2i = |-2-2i|e^{i\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

8. **Expresa** $\dfrac{(3i^{30}-i^{19})}{(2i^{34}-i^{40})}$ **en forma binómica.**

   Solución: Expresamos las potencias de i en módulo 4:

$$\frac{(3i^{30}-i^{19})}{(2i^{34}-i^{40})} = \frac{3i^{4*7+2}-i^{4*4+3}}{2i^{4*8+2}-i^{4*10}} = \frac{3i^2-i^3}{2i^2-1} = \frac{-3+i}{-2-1} = \frac{-3+i}{-3} = \frac{-3}{-3} - \frac{i}{3} = 1 - i\frac{1}{3}$$

9. **Calcula** $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)}$ **en forma modulo-argumental, expresando el ángulo en radianes.**

   Solución: En primer lugar ponemos cada uno de los números en forma modulo-argumental

$$\begin{aligned} \left(1+i\sqrt{3}\right) &= 2_{\pi/3} \\ (1+i) &= \sqrt{2}_{\pi/4} \end{aligned}$$

   y ahora hacemos la división

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)} = \frac{2_{\pi/3}}{\sqrt{2}_{\pi/4}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{\pi/3-\pi/4} = \left(\sqrt{2}\right)_{\pi/12} = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$$

10. **Calcula** $(2+3i)\cdot(2-5i)$

    Solución: Multiplicando elemento a elemento

$$(2+3i)\cdot(2-5i) = 4 - 10i + 6i - 15i^2 = 19 - 4i$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 2 de septiembre de 2005

1. **Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:**

   (a) **(1 punto) Resuelve la siguiente ecuación:** $2\cos(z) - i\operatorname{sen}(z) = i$
   Solución: Utilizando las definiciones de $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ \operatorname{sen}(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\end{aligned}$$

la ecuación queda

$$2\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) - i\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = i$$

y operando se obtiene

$$e^{iz}+e^{-iz}+\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2} = i \Rightarrow \frac{1}{2}e^{iz}+\frac{3}{2}e^{-iz} = i$$

Si llamamos

$$e^{iz} = \omega \Rightarrow e^{-iz} = \frac{1}{\omega}$$

tendremos, puesto que $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{2}\omega + \frac{3}{2}\frac{1}{\omega} = i$$

y multiplicando por 2ω obtenemos la ecuación

$$\omega^2 + 3 = 2\omega i \Leftrightarrow \omega^2 - 2\omega i + 3 = 0$$

Ecuación de segundo grado que se resuelve mediante la fórmula correspondiente

$$\omega = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4*3}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 3i\\ \omega_2 &= -i\end{aligned}$$

Como $e^{iz} = \omega$ tendremos

$$\begin{aligned}e^{iz_1} &= 3i \Leftrightarrow iz_1 = L(3i) = \ln(3) + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \Longleftrightarrow z_1 = -i\ln 3 + \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\\ e^{iz_2} &= -i \Leftrightarrow iz_2 = L(-i) = \ln(1) + i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right) \Longleftrightarrow z_2 = \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\end{aligned}$$

(b) **(1 punto) Encuentra todas las funciones analíticas** $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ **con**

$$u(x,y) = x^3 + axy^2 \qquad a \in \mathbb{R}$$

Solución: Como se dice que $f(x,y)$ es analítica, su parte real $u(x,y)$ debe ser una función armónica y cumplirá la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

Derivando $u(x,y)$ respecto x e y, una vez

$$\begin{aligned} u_x &= 3x^2 + ay^2 \\ u_y &= 2axy \end{aligned}$$

y otra

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 6x \\ u_{yy} &= 2ax \end{aligned}$$

Al sustituir en 1 se obtiene

$$6x + 2ax = 0 \Leftrightarrow (6+2a)\,x = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

luego $u(x,y)$ debe ser de la forma

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Para el cálculo de la parte imaginaria de $f(x,y)$ (función $v(x,y)$), tenemos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, utilizando de nuevo que $f(x,y)$ es analítica.

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Utilizando la primera de estas ecuaciones

$$u_x = v_y \Leftrightarrow 3x^2 - 3y^2 = v_y$$

e integrando respecto a y obtenemos la siguiente expresión para $v(x,y)$

$$v = \int \left(3x^2 - 3y^2\right) dy = 3x^2y - y^3 + \varphi(x)$$

Para encontrar la función $\varphi(x)$ derivamos respecto de x

$$v_x = 6xy + \varphi'(x)$$

expresión que debe coincidir con $-u_y = 6xy$, gracias a la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto

$$6xy + \varphi'(x) = 6xy$$

de donde

$$\varphi'(x) = 0$$

e integrando se obtiene

$$\varphi(x) = c \in \mathbb{R}$$

Finalmente la expresión para $v(x,y)$ es:

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + c$$

y $f(x,y)$ es de la forma

$$f(x,y) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3 + c\right)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f(x,y)$ como una función de z

$$f(z) = z^3 + ic$$

2. **Calcula las siguientes integrales**

$$a) \text{ (1.5 puntos) } \int_0^{2\pi} \tfrac{\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)}{5 - 4\cos(t)} dt \qquad b) \text{ (1 punto) } \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{x\,\text{sen}(2x)}{x^2+1} dx$$

Solución:

(a) Este apartado se puede resolver de dos formas. En la primera de ellas, a partir de la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)}{5 - 4\cos(t)} dt$$

se hace el cambio

$$\cos(t) = \frac{z^2+1}{2z}$$
$$\text{sen}(t) = \frac{z^2-1}{2iz}$$
$$dt = \frac{1}{iz} dz$$

para obtener la integral

$$\int_\gamma \frac{\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2 - \left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{5 - 4 * \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{1}{iz} dz$$

siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ la circunferencia unidad.

Desarrollando los cuadrados y realizando las operaciones correspondientes se obtiene

$$\frac{1}{i} \int_\gamma \frac{(z^4+1)}{z^2(10z - 4z^2 - 4)} dz$$

Por último si multiplicamos por i y cambiamos el signo al polinomio del denominador la integral queda como

$$i\int_\gamma \frac{(z^4+1)}{z^2(4z^2-10z+4)}dz$$

Ahora bien

$$4z^2-10z+4=0 \Leftrightarrow z=2 \text{ o } z=1/2$$

y el denominador puede ponerse como

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t)}{5-4\cos(t)}dt = i\int_\gamma \frac{(z^4+1)}{4z^2(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}dz \tag{2}$$

Para el cálculo de esta integral, podemos emplear el teorema de los residuos, utilizando solamente los residuos de las singularidades que estén dentro del círculo unidad

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \text{ que es un polo doble} \\ z_1 &= \frac{1}{2} \text{ que es un polo simple} \end{aligned}$$

mientras que $z_2=2$, no está dentro del círculo unidad y no será considerado para el cálculo de la integral.
La integral en términos de los residuos es

$$i\int_\gamma \frac{(z^4+1)}{4z^2(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}dz = i2\pi i\left\{\operatorname{Res}(f(z),z_0)+\operatorname{Res}(f(z),z_1)\right\}$$

El cálculo de residuos es muy sencillo. Para $z_0=0$, que es un polo doble

$$\operatorname{Res}(f(z),0)=\frac{\varphi_0'(0)}{1!}$$

siendo

$$\varphi_0(z)=\frac{(z^4+1)}{4(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

derivando $\varphi_0(x)$

$$\varphi_0'(z)=\frac{4z^3\left(4(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)\right)-(z^4+1)\left(4\left(z-\frac{1}{2}\right)+4(z-2)\right)}{\left(4(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

y evaluando en $z=0$

$$\varphi_0'(0)=\frac{4*0^3\left(4(0-2)\left(0-\frac{1}{2}\right)\right)-(0^4+1)\left(4\left(0-\frac{1}{2}\right)+4(0-2)\right)}{\left(4(0-2)\left(0-\frac{1}{2}\right)\right)^2}=\frac{5}{8}$$

En $z_1=\frac{1}{2}$, la función tiene un polo simple y entonces

$$\operatorname{Res}\left(f(z),\frac{1}{2}\right)=\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

siendo $\varphi_1(x)$ la función

$$\varphi_1(z) = \frac{(z^4+1)}{4z^2(z-2)}$$

que evaluamos en $z_1 = \frac{1}{2}$ para obtener el residuo de $f(z)$

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-2\right)} = -\frac{17}{24}$$

Utilizando la información anterior el valor de la integral es

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)}{5 - 4\cos(t)} dt &= i\int_\gamma \frac{(z^4+1)}{4z^2(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)} dz = i2\pi i\left(\operatorname{Res}(f(z), z_0) + \operatorname{Res}(f(z), z_1)\right) \\ &= -2\pi\left(\frac{5}{8} - \frac{17}{24}\right) = -2\pi\left(\frac{-2}{24}\right) = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

<u>Solución 2:</u> Otra forma de obtener el valor de la integral es por una parte utilizar relaciones trigonométricas conocidas para transformar el numerador de la función

$$\cos^2(t) - \overset{2}{\operatorname{sen}}(t) = \cos(2t)$$

y después utilizar la fórmula de Euler

$$\cos(2t) = \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2} = \frac{e^{i2t} + \frac{1}{e^{i2t}}}{2} = \frac{e^{i4t} + 1}{2e^{i2t}} = \frac{\left(e^{it}\right)^4 + 1}{2\left(e^{it}\right)^2}$$

El cambio es entonces

$$\begin{aligned}\cos(2t) &= \frac{z^4+1}{2z^2} \\ \cos(t) &= \frac{z^2+1}{2z} \\ dt &= \frac{1}{iz}dz\end{aligned}$$

La integral se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)}{5 - 4\cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 4\cos(t)} dt = \int_\gamma \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{5 - 4 * \frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} dz$$

que al operar nos da la integral dada en 2 y que resolvemos como antes.

(b) Para obtener el valor de esta integral hay que tener en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{x^2+1} dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+1} dx\right)$$

Y la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+1}dx$$

la podremos calcular mediante residuos.

El denominador del integrando puede descomponerse en $\mathbb{C}$ como

$$z^2+1=(z+i)(z-i)$$

Solamente necesitamos el residuo en $z_1=i$, puesto que $z_2=-i$ tiene parte imaginaria negativa. Con estos datos la integral es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+1}dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i)$$

siendo

$$f(z)=\frac{ze^{i2z}}{z^2+1}=\frac{\varphi(x)}{z-i}$$

con $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=\frac{ze^{i2z}}{z+i}$$

Como $z=i$ es un polo simple

$$\operatorname{Res}(f(z), i)=\varphi(i)=\frac{ie^{i2i}}{i+i}=\frac{e^{-2}}{2}$$

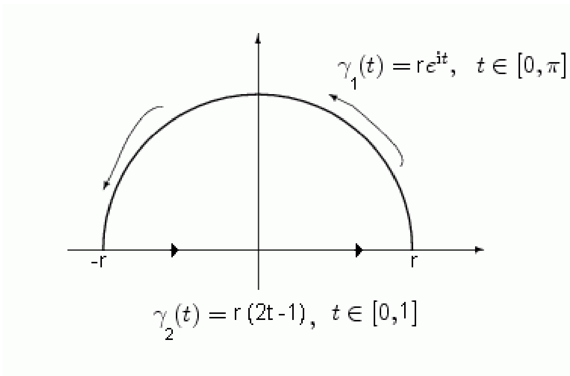
y la integral es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+1}dx = 2\pi i\frac{e^{-2}}{2}=i\pi e^{-2}$$

Por último la integral pedida es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{x^2+1}dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+1}dx\right)=\frac{\pi}{e^2}$$

3. **Calcula $\int_\gamma f(z)\,dz$ en función de r, a lo largo de $\gamma(t)=\gamma_1(t)\sqcup\gamma_2(t)$, siendo $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ las curvas dadas en la figura**



para cada una de las siguientes expresiones para $f(z)$

a) (0.5 ptos) $f(z) = \frac{z^2+2}{(z+i)^3}$. *b*) (1.5 ptos.) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ *c*) (1 pto.) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$

Solución:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z+i)^3}$: Solución trivial, puesto que la única singularidad de $f(z)$ es $z_0 = -i$, que siempre estará fuera de la curva cerrada, independientemente del radio de ésta. La integral es 0 para cualquier valor de r.

(b) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$. En este caso las singularidades son $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$, que son todas de tipo polo de orden 1, es decir, polos simples. Los complejos z_2 y z_3 no van a estar nunca dentro de la curva, luego solamente tenemos que calcular los residuos de $f(z)$ en z_1 y z_4

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), z_1) &= \operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \\ &= \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{i^2}{2i(i^2+4)} = \frac{1}{6}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), z_4) &= \operatorname{Res}(f(z), 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{4i^2}{(4i^2+1)(2i+2i)} = -\frac{1}{3}i\end{aligned}$$

- Si $r < 1$, no hay singularidades dentro de la semicircunferencia y entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Si $1 < r < 2$, solamente está dentro de la curva la singularidad i y entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f,i)] = 2\pi i\frac{1}{6}i = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$$

- Si $r > 2$, todas las singularidades $z_1 = i$ y $z_4 = 2i$ estarán dentro de la semicircunferencia y se tiene entonces que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,2i)] = 2\pi i\left(\frac{1}{6}i - \frac{1}{3}i\right) = \frac{\pi}{3}$$

- Si $r = 1$ ó $r = 2$, la integral no tiene sentido puesto que la curva pasará por una singularidad.

(c) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$. En este caso la única singularidad es $z_1 = 1$, que es esencial. Sin embargo, dicha singularidad se encuentra sobre el eje OX, de ahí que cuando el radio de la semicircunferencia sea ≥ 1, la curva pasará por la singularidad y la integral no podrá realizarse, para el caso de que el radio de la semicircunferencia sea < 1, no existirán singularidades en el interior de la curva y por tanto la integral valdrá 0. Resumiendo:

- Si $r < 1$, no hay singularidades dentro de la semicircunferencia y entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

- Si $r \geq 1$, la curva pasa por la singularidad y la integral no puede calcularse.

4. **(1.5 puntos) Sea un objeto de masa 1 sujeto mediante una fuerza externa, $f(t)$ para $t \geq 0$. Si $y(t)$ es el desplazamiento de la masa respecto a la posición de reposo, la segunda ley de Newton afirma que:**

$$y''(t) + 4y(t) = f(t)$$

Encuentra $y(t)$ **si** $f(t) = \cos(t)$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Solución: Utilizando las propiedades de la transformada de Laplace tenemos

$$\left(z^2 Y(s) - zy(0) - y'(0)\right) + 4Y(z) = \mathcal{L}(\cos(t))(z)$$

además

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cos(t))(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\cos(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) dt = \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty e^{-(z-i)t} dt + \int_0^\infty e^{-(z+i)t}\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{z-i} e^{-(z-i)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{-1}{z+i} e^{-(z+i)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right) \\
&= \frac{z}{z^2+1}
\end{aligned}$$

y la ecuación queda

$$\left(z^2 Y(s) - zy(0) - y'(0)\right) + 4Y(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

utilizando las condiciones iniciales y despejando $Y(z)$, se obtiene

$$Y(z) = \frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)} = \frac{z}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$$

Podemos ahora utilizar la fórmula de inversión de Bromwich para obtener

$$y(t) = \sum_{z_k} \operatorname{Res}\left(e^{zt} Y(s), z_k\right)$$

en nuestro caso

$$z_1 = 2i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = i \quad z_4 = -i$$

y los residuos son

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left(e^{zt}Y(z), 2i\right) &= \tfrac{2i}{(4i)(3i)i}e^{2it} = -\tfrac{1}{6}e^{i2t} \\
\text{Res}\left(e^{zt}Y(z), -2i\right) &= \tfrac{-2i}{(-4i)(-i)(-3i)}e^{-2it} = -\tfrac{1}{6}e^{-i2t} \\
\text{Res}\left(e^{zt}Y(z), i\right) &= \tfrac{i}{(3i)(-i)(2i)}e^{it} = \tfrac{1}{6}e^{it} \\
\text{Res}\left(e^{zt}Y(z), -i\right) &= \tfrac{-i}{(i)(-3i)(-2i)}e^{-it} = \tfrac{1}{6}e^{-it}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$y(t) = -\frac{1}{6}e^{i2t} - \frac{1}{6}e^{-i2t} + \frac{1}{6}e^{it} + \frac{1}{6}e^{-it}$$

que debe representarse en forma trigonométrica

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(\cos(t) - \cos(2t)\right)$$

ya que la ecuación diferencial implica a señales reales y la respuesta debe ser real.

5. **(1 punto) Construye la serie de Laurent centrada en el origen y convergente en $\frac{1}{2}$ de la siguiente función**

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-2)}$$

Solución: Buscamos un desarrollo de Laurent de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

donde en este caso $z_0 = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Podemos poner la función $f(z)$ como

$$f(z) = z^3\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right)$$

y podemos descomponer en fracciones simples la fracción que hay dentro del paréntesis para obtener

$$f(z) = z^3\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}\right) = z^3\left(\frac{-A}{1-z} + \frac{-B}{2-z}\right) = z^3\left(-A\frac{1}{1-z} - \frac{B}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

y utilizando el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ siempre que $|z| < 1$

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 \left(-A \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{B}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \right) = \left(-A \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+3} - B \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{n+3} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-A - \frac{B}{2^{n+1}} \right) z^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(-A - \frac{B}{2^{n-2}} \right) z^n
\end{aligned}$$

Calculamos ahora A y B

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \Leftrightarrow \frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
-2A - B &= 1
\end{aligned}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{aligned}
A &= -1 \\
B &= 1
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la función

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}} \right) z^n = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2^{n-2} - 1}{2^{n-2}} \right) z^n$$

Otra alternativa: Existe otra solución que consiste primero en realizar la división entre los dos polinomios

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-2)} = (z+3) + \frac{7z-6}{(z-1)(z-2)}$$

Descomponemos en fracciones simples la fracción que queda

$$\frac{7z-6}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-2)} = \frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-1)(z-2)}$$

de donde

$$7z - 6 = (A+B)z - (2A+B)$$

Igualando

$$\begin{aligned}
A + B &= 7 \\
2A + B &= 6
\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 8 \end{aligned}$$

La función queda

$$f(z) = (z+3) + \frac{-1}{(z-1)} + \frac{8}{(z-2)}$$

que podemos transformar en

$$f(z) = (z+3) + \frac{1}{(1-z)} - \frac{8}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

y como buscamos el desarrollo que pueda aplicarse sobre 1/2

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1 \\ \frac{1}{1-\frac{z}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2 \end{aligned}$$

Como $\left|\frac{1}{2}\right| < 1 < 2$, los desarrollos son válidos para $z = \frac{1}{2}$

$$f(z) = (z+3) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Se puede comprobar fácilmente que este resultado coincide con el anterior. Desarrollando hasta el orden 3 y operando

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+3) + \left(1+z+z^2\right) + \sum_{n=3}^{\infty} z^n - 4\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) = \\ &= (z+3) + \left(1+z+z^2\right) + \sum_{n=3}^{\infty} z^n - 4 - 2z - z^2 - 4\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} z^n - 2^2\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=3}^{\infty} z^n - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}} z^n \\ &= \sum \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) z^n \end{aligned}$$

tal y como se obtuvo con el cálculo anterior.

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener al menos 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.