Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad y Electrónica)
Examen de operaciones básicas, 25 de junio de 2005

1. **Calcula el módulo de $\frac{4-i}{4+i}$.**

   Solución: Por las propiedades del módulo

$$\left|\frac{4-i}{4+i}\right| = \frac{|4-i|}{|4+i|} = \frac{\sqrt{16+1}}{\sqrt{16+1}} = 1.$$

2. **Calcula el argumento de $-3-3i$.**

   Solución: El número complejo $-3-3i$ está situado en el tercer cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

$$\varphi = \arctan\frac{-3}{-3} + \pi = \arctan 1 + \pi = \pi/4 + \pi = 5\pi/4.$$

3. **Escribe $1-i$ en forma exponencial.**

   Solución: El argumento φ del número $1-i$ se calcula al igual que en el caso anterior como

$$\varphi = \arctan\frac{-1}{1} \in -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

   Tomando, por ejemplo $k=0$, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$1-i = |1-i|e^{i\varphi} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

4. **Escribe $2e^{4\pi i}$ en forma binómica.**

   Solución: Basta considerar que

$$2e^{4\pi i} = 2[\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)] = 2[1+i0] = 2.$$

5. **Escribe $\dfrac{1}{2-2i}$ en forma binómica.**

   Solución: Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de $2-2i$ y obtenemos

$$\frac{1}{2-2i} = \frac{2+2i}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + i\frac{1}{4}.$$

6. **Escribe $(-i)^{1500}$ en forma binómica.**

   Solución: Como $1500 = 4\cdot 375$, tenemos que

$$(-i)^{1500} = ((-i)^4)^{375} = 1^{375} = 1.$$

7. **Calcula $(2+2\sqrt{3}i)^{23}$.**

   Solución: El número $2+2\sqrt{3}i$ tiene por módulo $|2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ y por argumento $\varphi = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$, al estar en el primer cuadrante. Entonces

$$\begin{aligned}
(2+2\sqrt{3}i)^{23} &= (4e^{i\pi/3})^{23} = 4^{23}e^{i23\pi/3} = 4^{23}e^{i5\pi/3} \\
&= 4^{23}(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)) \\
&= 4^{23}(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) \\
&= 4^{23}(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)) \\
& \quad 4^{23}(1/2 - i\sqrt{3}/2).
\end{aligned}$$

8. **Calcula $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.**

Solución: El número $-2+2\sqrt{3}i$ tiene por módulo $|-2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ y por argumento $\varphi = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{-2} = \arctan -\sqrt{3} = 2\pi/3$, al estar en el segundo cuadrante. Entonces los argumentos de las raíces cuartas de $-2+2\sqrt{3}i$ son

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{2\pi/3 + 0\cdot 2\pi}{4} = 2\pi/12 = \pi/6. \\
\varphi_2 &= \frac{2\pi/3 + 1\cdot 2\pi}{4} = 8\pi/12 = 2\pi/3. \\
\varphi_3 &= \frac{2\pi/3 + 2\cdot 2\pi}{4} = 14\pi/12 = 7\pi/6. \\
\varphi_4 &= \frac{2\pi/3 + 3\cdot 2\pi}{4} = 20\pi/12 = 5\pi/3.
\end{aligned}$$

Entonces las raíces son

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt[4]{4}e^{i\pi/6} = \sqrt{2}[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)] = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \\
r_2 &= \sqrt[4]{4}e^{i2\pi/3} = \sqrt{2}[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}. \\
r_3 &= \sqrt[4]{4}e^{i7\pi/6} = \sqrt{2}[\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)] = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \\
r_4 &= \sqrt[4]{4}e^{i5\pi/3} = \sqrt{2}[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)] = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

9. **Calcula $(5+7i)\cdot(-2+i)$.**

Solución: Multiplicamos

$$(5+7i)\cdot(-2+i) = -10-7+i(5-14) = -17-9i.$$

10. **Calcula $\frac{5-2i}{-1+4i}$ en forma biómica.**

Solución: Multiplicamos denominador y numerador por $-1-4i$ y obtenemos

$$\frac{5-2i}{-1+4i} = \frac{(5-2i)(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{-13-18i}{17} = -\frac{13}{17} - i\frac{18}{17}.$$

<u>Nota</u>: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener más de 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, 25 de junio de 2005

1. **Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:**

   (a) **(1 punto) Demostrar que si $z = x + iy$, entonces $|e^z| = e^x$ y $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.**
   Solución: Por un lado

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |\cos y + i \operatorname{sen} y| = e^x$$

   ya que $e^x > 0$ y $|\cos y + i \operatorname{sen} y| = \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y) \\ &= e^x[\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)] = e^{x-iy} = e^{\overline{z}}. \end{aligned}$$

   (b) **(1 punto) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $e^z = 1 + i$.**
   Solución: Como vimos en el apartado anterior

$$|e^z| = e^x = |1 + i| = \sqrt{2},$$

   de donde

$$x = \log \sqrt{2}.$$

   Por otro lado, como

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \sqrt{2} \cos y + i\sqrt{2} \operatorname{sen} y = 1 + i,$$

   tenemos que

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{sen} y &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

   de donde $y = \pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Las soluciones de la ecuación serán por tanto

$$z = \log \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. **Calcular las siguientes integrales:**

   (a) **(1 punto)** $\displaystyle\int_0^\infty \tfrac{x^2+1}{x^4+1} dx.$
   Solución: En primer lugar, hemos de hacer notar que

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

ya que la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$ es par $[f(x)=f(-x)$ para todo $x\in\mathbb{R}]$. Las singularidades de $f(x)$ verifican que $x^4=-1$, por lo que serán las raíces cuartas de -1, que son

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+0\cdot 2\pi)/4}=e^{i\pi/4}=\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
r_2 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+1\cdot 2\pi)/4}=e^{i3\pi/4}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
r_3 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+2\cdot 2\pi)/4}=e^{i5\pi/4}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
r_4 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+3\cdot 2\pi)/4}=e^{i7\pi/4}=\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2\pi i[\operatorname{Res}(f,r_1)+\operatorname{Res}(f,r_2)].$$

Todas las singularidades son polos de orden 1 por lo que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,r_1) &= \lim_{z\to r_1}(z-r_1)\frac{z^2+1}{z^4+1}=\lim_{z\to r_1}\frac{z^2+1}{(z-r_2)(z-r_3)(z-r_4)}\\
&= \frac{r_1^2+1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_1-r_4)}=\frac{i+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})i\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1+i}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\frac{(1+i)(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}i
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,r_2) &= \lim_{z\to r_2}(z-r_2)\frac{z^2+1}{z^4+1}=\lim_{z\to r_2}\frac{z^2+1}{(z-r_1)(z-r_3)(z-r_4)}\\
&= \frac{r_2^2+1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)(r_2-r_4)}=\frac{-i+1}{-\sqrt{2}i\sqrt{2}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\frac{(1-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}i,
\end{aligned}$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right)=\pi\sqrt{2}.$$

Finalmente

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) **(1 punto)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\operatorname{sen}ax}{x^2+b^2}dx,\quad a,b>0.$

Solución: Como sabemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\operatorname{sen}ax}{x^2+b^2}dx=\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot e^{iax}}{x^2+b^2}dx\right),$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{iax}}{x^2+b^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, bi),$$

donde $f(z) = \dfrac{z \cdot e^{iaz}}{z^2+b^2}$ y bi es el polo con parte imaginaria positiva de $f(z)$, que es un polo de orden 1. Calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, bi) &= \lim_{z\to bi} (z-bi)\frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2+b^2} = \lim_{z\to bi} \frac{z \cdot e^{iaz}}{z+bi} \\ &= \frac{bi \cdot e^{iabi}}{2bi} = e^{-ab}/2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \operatorname{sen} ax}{x^2+b^2} dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{iax}}{x^2+b^2} dx\right) = \operatorname{Im}(2\pi i e^{-ab}/2) = \pi e^{-ab}.$$

3. **Sea γ la circunferencia de centro 1 y radio $r > 0$. Calcula en los casos en los que tenga sentido la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$**

   (a) **(1 punto) Para $f(z) = \dfrac{z-1}{z^3-z}$.**

   Solución: Las singularidades de la función $f(z) = \dfrac{z-1}{z^3-z}$ son las raíces de z^3-z, que son 0, 1 y -1. Calculemos los residuos de f en dichas singularidades.
   Para $z_0 = 0$, tenemos que

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{z-1}{z(z^2-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{z-1}{z^2-1} = 1,$$

   con lo que 0 es un polo de orden uno y $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$.
   Para $z_0 = 1$, tenemos que

$$\lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2+z} = 1/2,$$

   con lo que 1 es una singularidad evitable y $\operatorname{Res}(f, 1) = 0$.
   Para $z_0 = -1$, tenemos que

$$\lim_{z\to -1} (z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z-1}{z(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{z-1}{z(z-1)} = -1,$$

   con lo que -1 es un polo de orden uno y $\operatorname{Res}(f, -1) = -1$.
   Por otra parte, sabemos que las distancias del centro de la circunferencia a las singularidades son $d_1 = |0-1| = 1$, $d_2 = |1-1| = 0$ y $d_3 = |-1-1| = 2$, por lo que:

   - Si $r < 1$, la única singularidad dentro de la circunferencia será 1 y entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) = 0.$$

- Si $1 < r < 2$, las singularidades 1 y 0 estarán dentro de la circunferencia y entonces
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,0)] = 2\pi i.$$
- Si $r > 2$, todas las singularidades estarán dentro de la circunferencia y se tiene entonces que
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-1)] = 0.$$
- Si $r = 1$ ó $r = 2$, la integral no tiene sentido al anularse el denominador sobre la curva.

(b) **(2 punto) Para** $f(z) = \dfrac{z^2}{z(z^2+a^2)}$**,** $a > 0$**.**

Solución: Las singularidades de la función $f(z) = \frac{z^2}{z(z^2+a^2)}$ son 0, ai y $-ai$. Calculemos los residuos de f en dichas singularidades. Para $z_0 = 0$, tenemos que
$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{z(z^2+a^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z^2+a^2} = 0,$$
con lo que 0 es una singularidad evitable y $\mathrm{Res}(f,0) = 0$. Para $z_0 = ai$, tenemos que
$$\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z) = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{z^2}{z(z+ai)(z-ai)} = \lim_{z\to ai}\frac{z}{z+ai} = 1/2,$$
con lo que ai es un polo de orden uno y $\mathrm{Res}(f,ai) = 1/2$. Para $z_0 = -ai$, tenemos que
$$\lim_{z\to -ai}(z+ai)f(z) = \lim_{z\to -ai}(z+ai)\frac{z^2}{z(z+ai)(z-ai)} = \lim_{z\to -ai}\frac{z}{z-ai} = 1/2,$$
con lo que $-ai$ es un polo de orden uno y $\mathrm{Res}\,(f,-ai) = 1/2$.

Por otra parte, sabemos que las distancias del centro de la circunferencia a las singularidades son $d_1 = |0-1| = 1$, $d_2 = |ai-1| = 1+a^2$ y $d_3 = |-ai-1| = 1+a^2$, por lo que:

- Si $r < 1$, $f(z)$ es derivable en el interior de la circunferencia y por el Teorema de Cauchy
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$
- Si $1 < r < 1+a^2$, la única singularidad dentro de la circunferencia será 0 y entonces
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0) = 0.$$
- Si $r > 1+a^2$, todas las singularidades estarán dentro de la circunferencia y se tiene entonces que
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,ai) + \mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-ai)] = 2\pi i.$$

- Si $r = 1$ ó $r = 1 + a^2$, la integral no tiene sentido al anularse el denominador sobre la curva.

4. **(3 puntos) Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ecuación integro–diferencial**
$$y'(t) + 2y(t) + 1 + 2\int_0^t y(s)ds = f(t)$$
con la condición inicial $y(0) = 2$**, donde** $f(t) = (h_0(t) - h_2(t))t$ **donde a su vez** $h_a(t)$**,** $a > 0$ **denota la función de Heaviside.**

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación anterior y por las propiedades de la misma obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](z) &= \mathcal{L}\left[y'(t) + 2y(t) + 1 + 2\int_0^t y(s)ds\right](z) \\
&= \mathcal{L}[y'(t)](z) + \mathcal{L}[2y(t)](z) + \mathcal{L}[1](z) + \mathcal{L}\left[2\int_0^t y(s)ds\right](z) \\
&= z\mathcal{L}[y(t)](z) - y(0) + 2\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1}{z} + 2\frac{\mathcal{L}[y(t)](z)}{z} \\
&= \frac{z^2+2z+2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1}{z} - 2 \\
&= \frac{z^2+2z+2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1-2z}{z}.
\end{aligned}$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](z) &= \int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-zt}(h_0(t) - h_2(t))tdt \\
&= \int_0^2 e^{-zt}tdt = \left[-t\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^2 + \frac{1}{z}\int_0^2 e^{-zt}tdt \\
&= -2\frac{e^{-2z}}{z} + \left[-\frac{e^{-zt}}{z^2}\right]_0^2 = -2\frac{e^{-2z}}{z} - \frac{e^{-2z}}{z^2} + \frac{1}{z^2} \\
&= -e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{1}{z^2}.
\end{aligned}$$

Entonces
$$-e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2+2z+2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1-2z}{z},$$
de donde
$$\frac{z^2+2z+2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) = -e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1-2z}{z} = -e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{2z^2-z+1}{z^2}$$
y despejando $\mathcal{L}[y(t)](z)$ tenemos
$$\mathcal{L}[y(t)](z) = -e^{-2z}\frac{2z+1}{z(z^2+2z+2)} + \frac{2z^2-z+1}{z(z^2+2z+2)}.$$

Tomando transformadas inversas
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-e^{-2z}\frac{z+1}{z(z^2+2z+2)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3z-1}{z(z^2+2z+2)}\right](t).$$

Las singularidades para ambas funciones son las raíces de $z(z^2+2z+2)$, que son 0 y $-1\pm i$. Sean

$$F_1(z) = -\frac{2z+1}{z(z^2+2z+2)}$$

y

$$F_2(z) = \frac{2z^2-z+1}{z(z^2+2z+2)}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(z)\right](t) &= \operatorname{Res}(e^{zt}F_1(z),0) + \operatorname{Res}(e^{zt}F_1(z),-1+i) + \operatorname{Res}(e^{zt}F_1(z),-1-i) \\
&= \lim_{z\to 0} ze^{zt}F_1(z) + \lim_{z\to -1+i}(z+1-i)e^{zt}F_1(z) + \lim_{z\to -1-i}(z+1+i)e^{zt}F_1(z) \\
&= \lim_{z\to 0} -e^{zt}\frac{2z+1}{z^2+2z+2} + \lim_{z\to -1+i} -e^{zt}\frac{2z+1}{z(z+1+i)} + \lim_{z\to -1-i} -e^{zt}\frac{2z+1}{z(z+1-i)} \\
&= -\frac{1}{2} - e^{-t+it}\frac{2i-1}{(-1+i)2i} - e^{-t-it}\frac{-2i-1}{(-1-i)(-2i)} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2i}\left((\cos t + i\operatorname{sen} t)\frac{(2i-1)(-1-i)}{2} + (\cos t - i\operatorname{sen} t)\frac{(-2i-1)(-1+i)}{-2}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2i}\left((\cos t + i\operatorname{sen} t)\frac{3-i}{2} - (\cos t - i\operatorname{sen} t)\frac{3+i}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t\right) = \frac{1}{2}(-1 - 3e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[F_2(z)\right](t) &= \operatorname{Res}(e^{zt}F_2(z),0) + \operatorname{Res}(e^{zt}F_2(z),-1+i) + \operatorname{Res}(e^{zt}F_2(z),-1-i) \\
&= \lim_{z\to 0} ze^{zt}F_2(z) + \lim_{z\to -1+i}(z+1-i)e^{zt}F_2(z) + \lim_{z\to -1-i}(z+1+i)e^{zt}F_2(z) \\
&= \lim_{z\to 0} e^{zt}\frac{2z^2-z+1}{z^2+2z+2} + \lim_{z\to -1+i} e^{zt}\frac{2z^2-z+1}{z(z+1+i)} + \lim_{z\to -1-i} e^{zt}\frac{2z^2-z+1}{z(z+1-i)} \\
&= \frac{1}{2} + e^{-t+it}\frac{2-5i}{(-1+i)2i} + e^{-t-it}\frac{2+5i}{(-1-i)(-2i)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2i}\left((\cos t + i\operatorname{sen} t)\frac{(2-5i)(-1-i)}{2} + (\cos t - i\operatorname{sen} t)\frac{(2+5i)(-1+i)}{-2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2i}\left((\cos t + i\operatorname{sen} t)\frac{-7+3i}{2} - (\cos t - it)\frac{-7-3i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2i}(3i\cos t - i7t) = \frac{1}{2}(1 + 3e^{-t}\cos t - 7e^{-t}t).
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[F_1(z)\right](t-2)h_2(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[F_2(z)\right](t) \\
&= h_2(t)\frac{1}{2}(-1 - 3e^{-t+2}(t-2) + e^{-t+2}\cos(t-2)) \\
&\quad +\frac{1}{2}(1 + 3e^{-t}\cos t - 7e^{-t}t).
\end{aligned}$$

<u>Nota</u>: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener más de 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.