# Solución del examen de Variable Compleja y Transformadas

# I. T. I. Electrónica y Electricidad

# 2 de julio de 2004

1. Encuentra todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ que tengan como parte imaginaria

$$\text{Im } f(x + i \cdot y) = 4x - 4x^2 - 3y - 2xy + 3x^2y + 4y^2 - y^3.$$

**Solución:** Llamamos $v(x, y) = 4x - 4x^2 - 3y - 2xy + 3x^2y + 4y^2 - y^3$, y nos piden buscar funciones $u(x, y)$ que verifiquen las condiciones de Cauchy-Riemann. De la primera de ellas deducimos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -3 - 2x + 3x^2 + 8y - 3y^2.$$

Integrando respecto de $x$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\, dx = \\ &= \int (-3 - 2x + 3x^2 + 8y - 3y^2)\, dx = \\ &= -3x - x^2 + x^3 + 8xy - 3xy^2 + C(y), \end{aligned}$$

donde $C(y)$ es una función que depende de $y$ y no lo hace de $x$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 8x - 6xy + C'(y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 4 - 8x - 2y + 6xy \end{aligned}$$

A partir de la segunda condición de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

deducimos que

$$8x - 6xy + C'(y) = -(4 - 8x - 2y + 6xy) \Longrightarrow C'(y) = -4 + 2y$$

y, por lo tanto,

$$C(y) = \int C'(y)\, dy = \int (-4 + 2y)\, dy = -4y + y^2 + C$$

donde ahora $C$ es una constante de integración real que no depende ni de $x$ ni de $y$. Las funciones enteras pedidas son las de la forma

$$\begin{aligned} f(x+i\cdot y) &= \text{Re } f(x+i\cdot y) + i\cdot \text{Im } f(x+i\cdot y) = \\ &= -3x - x^2 + x^3 + 8xy - 3xy^2 - 4y + y^2 + C + \\ &\quad +i\cdot(4x - 4x^2 - 3y - 2xy + 3x^2y + 4y^2 - y^3), \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria.

2. Se considera la función
$$f(z) = \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}.$$
Halla todas las singularidades aisladas, analiza de qué tipo son y calcula los residuos en dichas singularidades.

**Solución:** Para hallar las singularidades tendremos que buscar los valores que anulan el denominador.

$$\begin{aligned} (z^2-2z+2)^2 = 0 &\iff z^2-2z+2=0 \iff \\ &\iff z = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2} \iff \\ &\iff z = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} \iff \\ &\iff z = \frac{2\pm 2\cdot i}{2} \iff \\ &\iff z = 1\pm i \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$f(z) = \frac{z}{(z-(1+i))^2(z-(1-i))^2},$$
y de aquí es inmediato que las únicas singularidades son $z_1 = 1+i$ y $z_2 = 1-i$, que obviamente son aisladas. Como ambas son ceros de segundo orden del denominador y no anulan el numerador, podemos concluir son polos de orden 2.

Para calcular el residuo en $z_1 = 1+i$ partimos de la función

$$\phi_1(z) = (z-(1+i))^2\cdot f(z) = \frac{z}{(z-(1-i))^2}.$$

Entonces
$$\phi_1'(z) = \frac{1\cdot(z-(1-i))^2 - z\cdot 2(z-(1-i))}{(z-(1-i))^4},$$

y aplicamos que

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f, 1+i) &= \frac{\phi_1'(1+i)}{1!} = \\
&= \frac{((1+i)-(1-i))^2 - (1+i)\cdot 2((1+i)-(1-i))}{((1+i)-(1-i))^4} = \\
&= \frac{(2i)^2 - 4i(1+i)}{(2i)^4} = \\
&= \frac{-4-4i+4}{16} = \\
&= \frac{-i}{4}.
\end{aligned}$$

Para calcular el residuo en $z_2 = 1-i$ hemos de proceder de manera semejante, partiendo de la función

$$\phi_2(z) = (z-(1-i))^2 \cdot f(z) = \frac{z}{(z-(1+i))^2}$$

y de su derivada

$$\phi_2'(z) = \frac{1\cdot(z-(1+i))^2 - z\cdot 2(z-(1+i))}{(z-(1+i))^4}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f, 1-i) &= \frac{\phi_2'(1-i)}{1!} = \\
&= \frac{((1-i)-(1+i))^2 - (1-i)\cdot 2((1-i)-(1+i))}{((1-i)-(1+i))^4} = \\
&= \frac{(-2i)^2 + 4i(1-i)}{(-2i)^4} = \\
&= \frac{-4+4i+4}{16} = \\
&= \frac{i}{4}.
\end{aligned}$$

La conclusión final es, por lo tanto, que $z_1 = 1+i$ y $z_2 = 1-i$ son las dos únicas singularidades, que ambas son polos de orden dos y que sus residuos valen

$$\begin{aligned}
&\text{Res}\,(f, 1+i) = -\frac{i}{4}, \\
&\text{Res}\,(f, 1-i) = \frac{i}{4}.
\end{aligned}$$

3. Sea $\gamma$ la circunferencia centrada en $z_0 = 0$ y de radio $R$ (con $R > 0$ y $R \neq 1$). Calcula la integral
$$\int_\gamma \frac{\cos(z+1)}{z(z+1)}\,dz$$
en función de $R$.

**Solución:** Llamemos
$$f(z) = \frac{\cos(z+1)}{z(z+1)}.$$
Como el numerador es una función entera las únicas singularidades saldrán de los ceros del denominador. Trivialmente concluimos que dichas singularidades son $z_1 = 0$ y $z_2 = -1$, y son polos simples, puesto que anulan con orden 1 el denominador y no son ceros del numerador.

Para el residuo en $z_1 = 0$ construimos $\phi_1(z) = z \cdot f(z)$ para deducir que
$$\text{Res }(f,0) = \phi_1(0) = \left.\frac{\cos(z+1)}{z+1}\right|_{z=0} = \frac{\cos(0+1)}{0+1} = \frac{\cos 1}{1} = \cos 1.$$
Para obtener el otro residuo partimos de $\phi_2(z) = (z+1)\cdot f(z)$, y
$$\text{Res }(f,-1) = \phi_2(-1) = \left.\frac{\cos(z+1)}{z}\right|_{z=-1} = \frac{\cos(-1+1)}{-1} = \frac{\cos 0}{-1} = -1.$$

Si $0 < R < 1$ la singularidad $z_1 = 0$ es interior a la circunferencia, pero la singularidad $z_2 = -1$ es exterior. En cambio, si $R > 1$ ambas singularidades son interiores e influyen en el teorema de los residuos. Según este teorema
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \begin{cases} 2\cdot\pi\cdot i\cdot \text{Res }(f,0) \text{ si } 0 < R < 1, \\ \\ 2\cdot\pi\cdot i\cdot(\text{Res }(f,0) + \text{Res }(f,-1)) \text{ si } R > 1. \end{cases}$$
Por lo tanto el resultado pedido es
$$\int_\gamma \frac{\cos(z+1)}{z(z+1)}\,dz = \begin{cases} 2\pi\cos 1\cdot i \text{ si } 0 < R < 1, \\ \\ 2\pi(-1+\cos 1)\cdot i \text{ si } R > 1. \end{cases}$$

4. Utiliza la transformada de Laplace para resolver en función del parámetro real $\alpha > 0$ la ecuación diferencial
$$y''(t) + y(t) = \text{sen}(\alpha\cdot t)$$
con condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

**Solución:** Gracias a las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''(t) + y(t)] &= \mathcal{L}[y''(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = \\ &= (z^2\mathcal{L}[y(t)] - zy(0) - y'(0)) + \mathcal{L}[y(t)] = \\ &= (z^2\mathcal{L}[y(t)] - z \cdot 0 - 1) + \mathcal{L}[y(t)] = \\ &= (z^2 + 1)\mathcal{L}[y(t)] - 1.\end{aligned}$$

Llamemos

$$f(t) = \operatorname{sen}(\alpha \cdot t).$$

Entonces es conocido que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2},$$

y por lo tanto, tras aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial obtendremos que

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[y(t)] - 1 = \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}.$$

Podemos despejar $y(t)$ aplicando la antitransformada, de la que aprovechamos la linealidad,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2 + 1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{(z^2 + \alpha^2)(z^2 + 1)}\right].$$

Es inmediato que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2 + 1}\right] = \operatorname{sen} t,$$

y por lo tanto sólo hay que calcular la segunda parte. Se presenta una disyuntiva, en función del valor de $\alpha$. Si $\alpha \neq 1$ aparecerán 4 polos simples $z_1 = \alpha \cdot i$, $z_2 = -\alpha \cdot i$, $z_3 = i$ y $z_4 = -i$, pero cuando $\alpha = 1$ se producirá un fenómeno de resonancia, debido a la aparición de los polos dobles $z_1 = i$ y $z_2 = -i$.

- Si $\alpha \neq 1$ calcularemos la antitransformada mediante una factorización en fracciones simples. Así pues buscaremos

  $$\frac{\alpha}{(z^2 + \alpha^2)(z^2 + 1)} = \frac{Az + B}{z^2 + \alpha^2} + \frac{Cz + D}{z^2 + 1},$$

  que conduce a la ecuación

  $$\alpha = (Az + B)(z^2 + 1) + (Cz + D)(z^2 + \alpha^2).$$

  El sistema lineal de cuatro ecuaciones e incógnitas final es

  $$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D &= 0 \\ A + \alpha^2 C &= 0 \\ B + \alpha^2 D &= \alpha \end{aligned}$$

Restando la primera y la tercera ecuación por un lado y la segunda y la cuarta por otra parte, y teniendo en cuenta que $\alpha^2 - 1 \neq 0$, deducimos que

$$(\alpha^2 - 1) \cdot C = 0 \Longrightarrow C = 0, A = 0$$

$$(\alpha^2 - 1) \cdot D = \alpha \Longrightarrow D = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}, B = -\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{(z^2+\alpha^2)(z^2+1)}\right] &= -\frac{1}{\alpha^2-1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{z^2+\alpha^2}\right] + \frac{\alpha}{\alpha^2-1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right] = \\
&= -\frac{1}{\alpha^2-1}\operatorname{sen}(\alpha \cdot t) + \frac{\alpha}{\alpha^2-1}\operatorname{sen} t,
\end{aligned}$$

y la solución del problema, en el caso $\alpha \neq 1$, es

$$\begin{aligned}
y(t) &= (\operatorname{sen} t) + \left(-\frac{1}{\alpha^2-1}\operatorname{sen}(\alpha \cdot t) + \frac{\alpha}{\alpha^2-1}\operatorname{sen} t\right) = \\
&= -\frac{1}{\alpha^2-1}\operatorname{sen}(\alpha \cdot t) + \frac{\alpha^2+\alpha-1}{\alpha^2-1}\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

- En el caso $\alpha = 1$ aparecen raíces complejas múltiples. Aunque hay varias formas de resolver el problema, no es mala idea usar residuos para la función

  $$g(t, z) = \frac{e^{tz}}{(z^2+1)^2}.$$

  Para el polo doble $z_1 = i$ construimos

  $$\phi_1(z) = (z-i)^2 \cdot g(t, z) = \frac{e^{tz}}{(z+i)^2}.$$

  Derivando respecto de $z$

  $$\phi_1'(z) = \frac{te^{tz}(z+i)^2 - e^{tz}2(z+i)}{(z+i)^4},$$

  y en la singularidad $z_1 = i$ resulta

  $$\begin{aligned}
  \text{Res } (g, i) &= \phi_1'(i) = \\
  &= \frac{te^{it}(2i)^2 - e^{it}2(2i)}{(2i)^4} = \\
  &= \frac{-4te^{it} - 4e^{it}i}{16} = \\
  &= -\frac{t}{4}e^{it} - \frac{i}{4}e^{it}.
  \end{aligned}$$

Para el polo doble $z_2 = -i$ llamamos

$$\phi_2(z) = (z+i)^2 \cdot g(t,z) = \frac{e^{tz}}{(z-i)^2},$$

derivamos respecto de $z$

$$\phi_2'(z) = \frac{te^{tz}(z-i)^2 - e^{tz}2(z-i)}{(z-i)^4},$$

y realizamos la sustitución $z = -i$ para deducir que

$$\begin{aligned}
\text{Res } (g,-i) &= \phi_2'(-i) = \\
&= \frac{te^{-it}(-2i)^2 - e^{-it}2(-2i)}{(-2i)^4} = \\
&= \frac{-4te^{-it} + 4e^{-it}i}{16} = \\
&= -\frac{t}{4}e^{-it} + \frac{i}{4}e^{-it}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2}\right] &= \text{Res } (g,i) + \text{Res } (g,-i) = \\
&= \left(-\frac{t}{4}e^{it} - \frac{i}{4}e^{it}\right) + \left(-\frac{t}{4}e^{-it} + \frac{i}{4}e^{-it}\right) = \\
&= \left(-\frac{t}{4}e^{it} - \frac{t}{4}e^{-it}\right) + \left(-\frac{i}{4}e^{it} + \frac{i}{4}e^{-it}\right) = \\
&= -\frac{t}{2} \cdot \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) = \\
&= -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Concluimos pues que, para el caso $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned}
y(t) &= (\operatorname{sen} t) + \left(-\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right) = \\
&= -\frac{t}{2}\cos t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Agrupando los dos casos deducimos que la solución del problema es

$$y(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha^2-1}\operatorname{sen}(\alpha \cdot t) + \dfrac{\alpha^2+\alpha-1}{\alpha^2-1}\operatorname{sen} t \text{ si } \alpha \neq 1 \\ -\dfrac{t}{2}\cos t + \dfrac{3}{2}\operatorname{sen} t \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$