Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Técnico Industrial
(Electricidad y Electrónica Industrial)
Curso 01/02
Asignatura: "Variable compleja y transformadas"
12 de septiembre del 2002.

Cuestiones teóricas

1. **(1 Pto.)** Sea la función $f(z) = z^2 \cos(\mathbf{i}/z)$. ¿Existe alguna relación entre los valores de la integral de f a lo largo de las curvas representadas en las siguientes figuras? ¿Por qué?

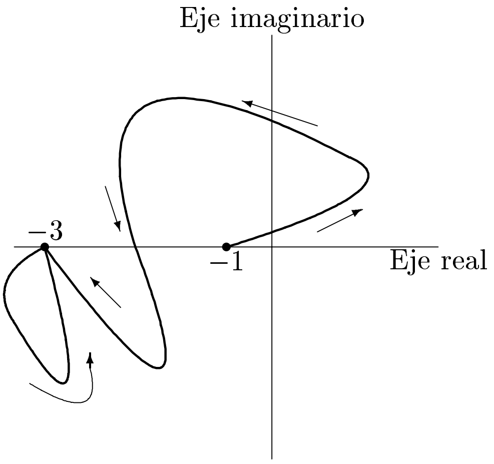

Figura 1: Rango de γ_1

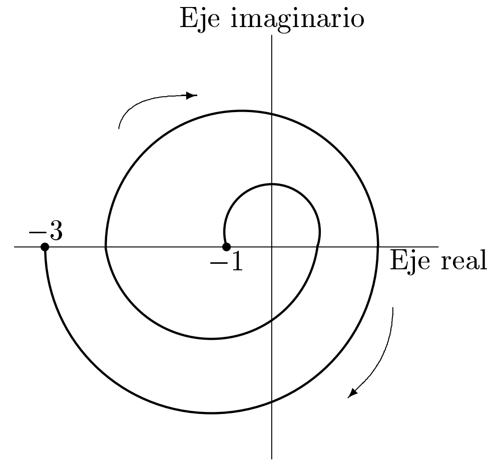

Figura 2: Rango de γ_2

2. **(1 Pto.)** Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera de la forma $f(x + \mathbf{i}y) = g(y) + \mathbf{i}h(x)$, con $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real. Comprueba que f es constante.

3. **(0.5 Ptos.)** ¿Existe alguna función $f \in \mathcal{H}(D)$, con $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ de forma que $f(1) \neq f(1 - \frac{\mathbf{i}}{2})$ y $f^{(n)}(1) = 0$ para cada $n \geq 1$? ¿Por qué?

Problemas

1. **(2.5 Ptos.)** Determina las singularidades de las siguientes funciones. Clasifícalas y, en caso de que sean aisladas, calcula los correspondientes residuos:

(a) $\dfrac{1}{z - z^3}$ (b) $e^{-z}\cos(1/z)$ (c) $\dfrac{e^{1/(z-1)}}{z+2}$

(d) $\operatorname{Re} z + \mathbf{i}\,(\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z)$ (e) $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$

2. **(2.5 Ptos.)** Dada la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z-1)}{z-\pi} + \frac{z}{(z-\pi)^2}$$

Calcula su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto $z_0 = \pi$. Indica además el anillo de convergencia de dicha serie y el carácter de la singularidad de f en $z_0 = \pi$.

3. **(2.5 Ptos.)** Calcula el valor de las integrales siguientes,

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx, \ (\alpha > 0)$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{(\cos(3t))^2}{1-2\beta\cos t+\beta^2}\,dt, \ (\beta > 1)$

4. **(2.5 Ptos.)** Al estudiar el flujo de carga en un circuito eléctrico de tipo LCR, ver Figura 3, en el que se abre el interruptor al cabo de un cierto tiempo, aparecen ecuaciones diferenciales de orden dos, de forma que el término independiente es una función discontinua. Resuelve el siguiente problema de Cauchy que modela uno de estos circuitos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2q}{dt^2}(t) + \beta\dfrac{dq}{dt}(t) + q(t) = e(t), \\ q(0) = 0, \quad \dfrac{dq}{dt}(0) = 0, \end{array}\right\}$$

siendo $q(t)$ la función que indica la carga en cada instante t,

$$e(t) = \begin{cases} at, & 0 \le t \le 1 \\ a, & 1 < t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

la fuerza electromotriz del circuito y $\beta \in \mathbb{R}$ una constante.

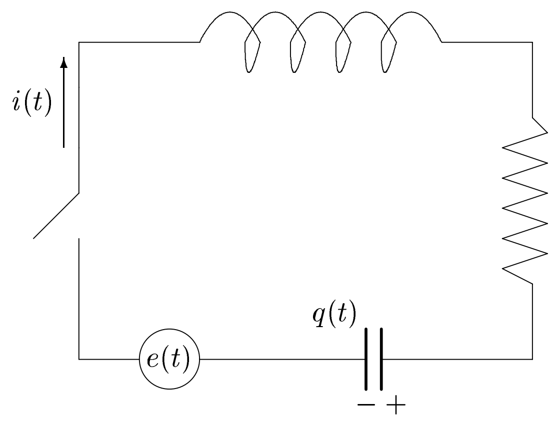

Figura 3: Circuito LCR