Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

**Ingeniero Técnico Industrial**
**(Electricidad y Electrónica Industrial)**
**Curso 00/01**
**Asignatura: "Variable compleja y transformadas"**
**13 de septiembre del 2001.**

## Cuestiones.

Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. **(1.25 Ptos)** Existe una función $f$ holomorfa en el disco unidad, $f \in \mathcal{H}(B_1(0))$ de forma que $f(\mathbf{i}/3) = 1$ y
$$0 = \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega, \qquad \forall\ z \in B_{1/2}(0)$$
siendo $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{\mathbf{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. **(1.25 Ptos)** Existe una función $f$ holomorfa en un abierto convexo $D \subset \mathbb{C}$ de forma que dados dos puntos $z_0, z_1 \in D$ con $z_0 \neq z_1$, es posible determinar dos curvas distintas $\gamma, \sigma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, diferenciables a trozos, uniendo ambos puntos (es decir, $\gamma(0) = z_0 = \sigma(0)$ y $\gamma(1) = z_1 = \sigma(1)$), con rango contenido en $D$ ($\gamma(t), \sigma(t) \in D$, $\forall\ t \in [0,1]$) y de forma que:
$$\int_\gamma f(z)\, dz \neq \int_\sigma f(z)\, dz$$

## Problemas.

1. **(2.5 Ptos)** Dada la función
$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z - \pi} + \frac{\mathbf{i}}{z^2(z-\pi)}$$
Calcula su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto $z_0 = \pi$. Indica además el anillo de convergencia de dicha serie y el carácter de la singularidad de $f$ en $z_0 = \pi$.

2. **(2.5 Ptos)** Calcula las siguientes integrales reales usando el teorema de los residuos.

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha - \operatorname{sen} x}\, dx, \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ |\alpha| > 1)$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$

3. **(2.5 Ptos)** Consideremos un sistema formado por dos circuitos eléctricos, denominados primario y secundario respectivamente, que están acoplados inductivamente (ver Figura 1). Aplicando las leyes de Kirchhoff a cada uno de los circuitos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales que permite calcular las intensidades,
$$\left.\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + M \frac{dI_2}{dt} &= E(t) \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + M \frac{dI_1}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

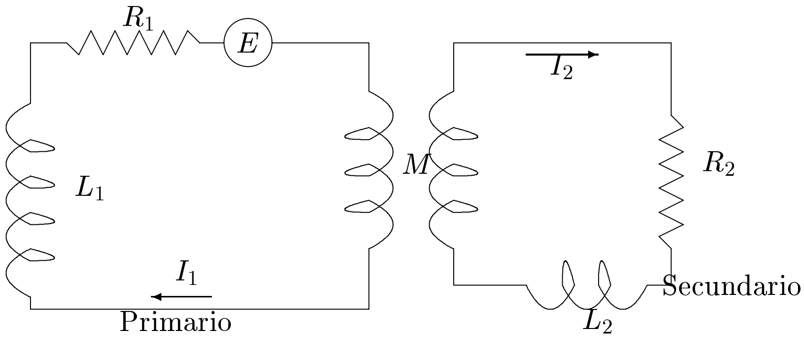


Figura 1: Circuitos acoplados inductivamente

(a) Considera el caso particular en que las resistencias toman los valores $R_1 = 4\Omega$ y $R_2 = 10\Omega$, las inductancias son $L_1 = 2$, $L_2 = 8$ y $M = 2$ henrios y, finalmente, el valor del voltaje aplicada al circuito primario en cada tiempo $t$ es de la forma $E(t) = \operatorname{sen}(2t)$, y escribe el sistema resultante.

(b) Calcula la transformada de Laplace de cada una de las ecuaciones diferenciales anteriores, teniendo en cuenta además que en el instante inicial $t = 0$ la intensidad de corriente en ambos circuitos en nula ($I_1(0) = I_2(0) = 0$).

(c) Calcula las transformadas de Laplace de las intensidades resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante.

(d) Finalmente, obtén las intensidades usando la transformada inversa de Laplace.

4. **(2.5 Ptos)** Sea $\gamma_r$ la curva obtenida al unir el segmento $[-r, r]$ con la curva $\beta_r$, recorrida en sentido horario (ver Figura 2). Calcula el valor de la integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{z^2+1}{z^4+2z^3+5z^2+8z+4}\, dz$$

teniendo en cuenta los diferentes valores del parámetro $r > 0$.

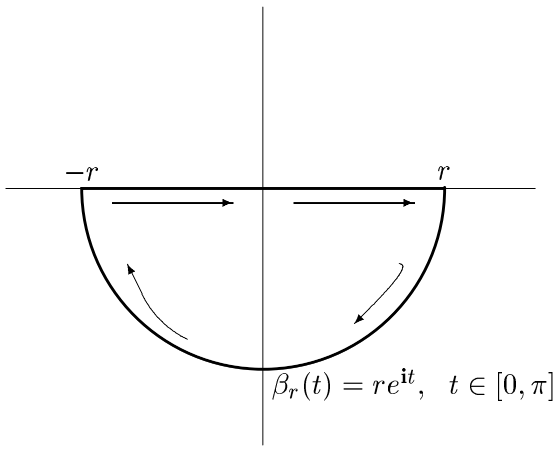


Figura 2: Curva $\gamma_r$