



Ingeniero Técnico Industrial
(Electricidad y Electrónica Industrial)

Curso 00/01

Asignatura: "Variable compleja y transformadas"

9 de febrero del 2001.

Cuestiones.

1. Calcula la derivada de orden 1234 de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

en el punto $z_0 = i$.

2. Indica de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, siendo γ el segmento que une los puntos $z_0 = 0$ y $z_1 = 1 + i$:

$$(a) \int_{\gamma} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

$$(b) \int_{\gamma} \bar{z} dz = \frac{(\bar{z})^2}{2} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$$

$$(c) \int_{\gamma} \cos(z^2) dz = \frac{\text{sen}(z^2)}{2} \Big|_0^{1+i} = \frac{\text{sen}(1+i)^2}{2} = \frac{\text{sen } i}{2}$$

Problemas.

1. Clasifica las singularidades que presentan las siguientes funciones y calcula el residuo en aquéllas que sean aisladas:

$$(a) \frac{1 - \cos z}{z^2} \quad (b) (z+1)e^{1/z} \quad (c) \frac{z}{\text{sen } z} \quad (d) \frac{z-1}{z^2+1} \quad (f) \frac{\bar{z}}{z+1}$$

2. Calcula las siguientes integrales reales usando el teorema de los residuos.

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2(x)}{3 + \cos x} dx, \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx$$

3. Resuelve el siguiente problema de condiciones iniciales ($\beta > 0$):

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + \beta^2 y(t) &= \phi(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

siendo ϕ la función,

$$\phi(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq 1, \\ e, & 1 < t \end{cases}$$

4. Sea γ_r la curva obtenida al recorrer el cuadrado de vértices $r + ri$, $-r + ri$, $r - ri$ y $-r - ri$ en sentido positivo o antihorario (ver la Figura 1). Calcula el valor de la integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{z^2 + 1}{z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4} dz$$

teniendo en cuenta los diferentes valores del parámetro $r > 0$.

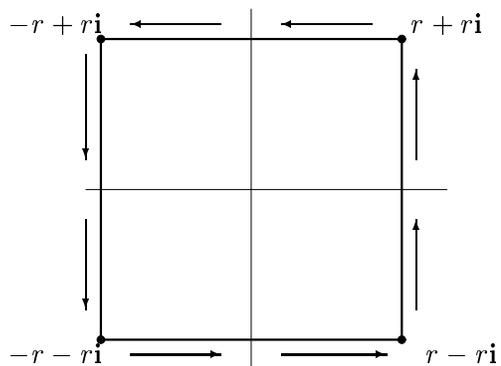


Figura 1: Cuadrado γ_r

NOTA:

- Las dos cuestiones valen 1,25 puntos cada una de ellas.
 - Los problemas, de los que el alumno **deberá elegir tres**, tienen una puntuación de 2,5 puntos.
-