Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Técnico Industrial
(Electricidad y Electrónica Industrial)
Curso 99/00
Asignatura: "Variable compleja y transformadas"
12 de septiembre del 2000.

Cuestiones.

1. Indica, justificando la respuesta, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

   (a) Existe una función entera, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, y acotada de forma que $f(0) \neq 0$ y $f(\mathbf{i}) = 0$.

   (b) Existe una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus H$, con $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z = -1\}$, de forma que
   $$f'(z) = \frac{1}{z + \mathbf{i}}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus H$$

2. Dada la función
   $$f(z) = \frac{1}{z(z + \mathbf{i})}$$
   calcula $f^{(20)}(1)$.

Problemas.

1. Sean las funciones
   $$\text{(a) } f(z) = \frac{\cos z}{(z+1)(z-\mathbf{i})}, \quad \text{(b) } g(z) = \frac{e^{-1/z}}{z}, \quad \text{(c) } h(z) = |z| + \operatorname{sen} z \quad \text{(d) } k(z) = \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$$
   Determina y clasifica sus singularidades y, en el caso de las aisladas, calcula el residuo de la función.

2. Calcula las siguientes integrales:
   $$\text{(a) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}\, dx, \qquad \text{(b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\alpha x)}{(x^2+1)(x+2)}\, dx,\ \alpha > 0$$

3. Al estudiar el flujo de carga en circuitos eléctricos dotados de una resistencia y un inductor, cuando el voltaje que produce el generador no es continuo aparecen ecuaciones diferenciales lineales de orden dos de forma que el término independiente es una función discontinua. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:
   $$\left.\begin{array}{l} y''(t) + \beta\, y'(t) = \phi(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

siendo ϕ la siguiente función escalonada,

$$\phi(t) = \begin{cases} a, & t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

con $a \neq 0$.

4. Estudia la derivabilidad de la función $f(z) = \cos(\bar{z})$ y a continuación calcula la integral de f a lo largo de la curva γ cuyo rango se representa en la figura.