

Examen de “Variable Compleja y Transformadas”
3^{er} Cuatrimestre de Ingeniería Técnica Industrial
(Electricidad y Electrónica Industrial)

6 de septiembre de 1999

Cuestiones.

1. Calcula el valor de la integral,

$$\int_{\gamma} \cos\left(\frac{1}{z+2i}\right) dz$$

donde γ es la elipse centrada en el origen de semiejes 2 y 1, respectivamente, recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

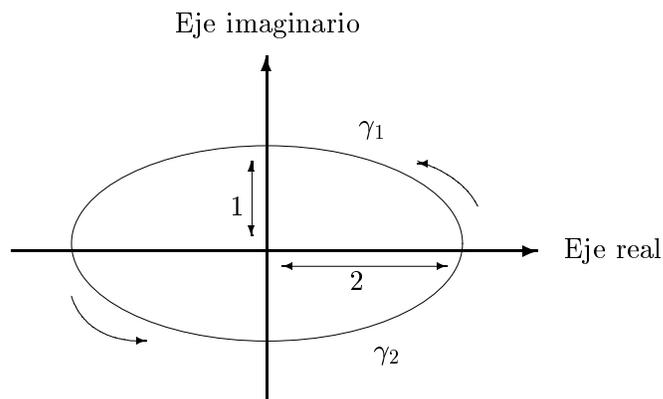


Figura 1: Elipse γ

Nota: Una posible parametrización de la elipse γ es la dada por

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightsquigarrow \gamma_1(t) = -t + i\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \end{aligned}$$

para la parte de arriba y

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightsquigarrow \gamma_2(t) = t - i\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \end{aligned}$$

para la de abajo ($\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$).

2. Dada la función $g(z) = \cos \bar{z}$, ¿existirá una función entera, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, de forma que

$$f'(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} ?$$

Justifica la respuesta.

Problemas.

1. Una función $u : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es **armónica** en el dominio D si es de clase C^2 (existen sus parciales de orden dos y son funciones continuas) y se verifica la relación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0, \quad \forall z \in D$$

Dada una función holomorfa $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, comprueba que las funciones parte real, $u(z) = \text{Re}(f(z))$, y parte imaginaria de f , $v(z) = \text{Im}(f(z))$, son armónicas en D .

2. Calcula:

- (a) El valor de la integral

$$\int_{\gamma} \bar{z} |z|^2 dz$$

siendo γ la curva de la Figura 2, recorrida en el sentido que indican las flechas.

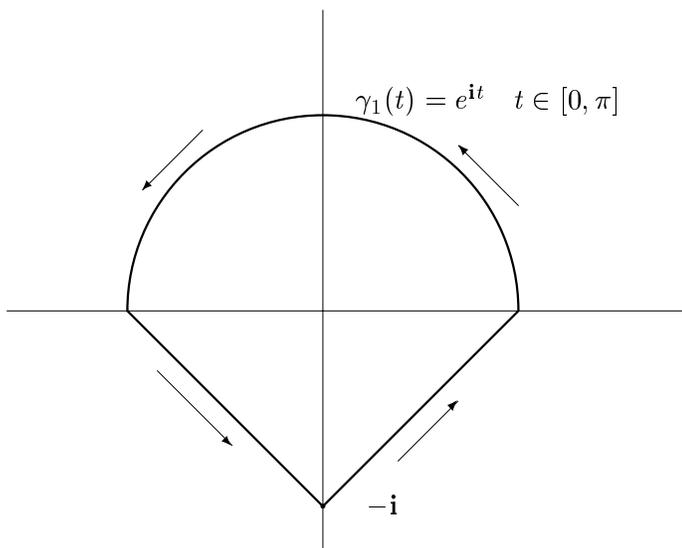


Figura 2: Curva γ del Problema 2

- (b) Los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, clasificando éstas previamente.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^3(z+i)} \quad g(z) = e^{1/(z-2i)} \quad h(z) = \frac{z - \text{sen}z}{z(z-1)}$$

3. Calcula el valor de las integrales:

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(ax)}{x(x^2+b^2)} dx \quad (a, b > 0) \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

4. Encuentra la solución del oscilador armónico dado por la ecuación diferencial:

$$y''(t) + \beta y(t) = \text{sen}(\omega t), \quad (\omega > 0 \text{ y } \omega^2 - \beta \neq 0)$$

que verifica las condiciones iniciales:

$$y(0) = -1/2, \quad y'(0) = 0$$