Examen de “Variable Compleja y Transformadas”
3[er] Cuatrimestre de Ingeniería Técnica Industrial
(Electricidad y Electrónica Industrial)

10 de febrero de 1999

Cuestiones.

1. Calcula el valor de la integral,
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$
siendo γ la curva cuyo rango se representa a continuación y orientada en el sentido que indican las flechas.

2. Dada la función $f(z) = \frac{1}{1+z}$, calcula el valor de $f^{(20)}(1)$.

Problemas.

1. Calcula:
   (a) La serie de Laurent de la función
   $$f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}$$
   alrededor de los puntos $z_0 = 0, 1, i$. Indica en cada caso los radios del anillo de convergencia.
   (b) Los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, indicando de qué tipo son dichas singularidades.
   $$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z+1)^3}, \qquad g(z) = e^{-\frac{1}{z}}, \qquad h(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z}$$

2. Sea la función $f(z) = \operatorname{sen}(\bar{z})$. Se pide que calcules:
   (a) Los puntos de $\mathbb{C}$ para los cuales f es derivable.
   (b) El valor de la integral de f a lo largo de la siguiente curva,

3. Calcula el valor de las integrales:
$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(a\,x)}{(x^2+4)\,(x-1)}\, dx, \quad a > 0 \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx$$

4. Encuentra la solución del siguiente problema de Cauchy,

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = \operatorname{sen}(\omega\, t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

con $\omega > 1$.