



**OBSERVACIONES GENERALES AL EXAMEN:**

- 1.- Responde razonadamente a las preguntas.
- 2.- Resuelve cada apartado de forma independiente.
- 3.- Los resultados graves invalidan cualquier resultado posterior.
- 4.- Expresa los resultados con claridad, evitando excesivas tachaduras.
- 5.- Si utilizas cálculos aproximados debes emplear 4 cifras decimales significativas por redondeo.

1. Responde a las siguientes cuestiones

(a) (0.6 ptos.) Construye en  $\mathbb{R}^4$  un simplex regular de lado 2 y con uno de sus vértices en el punto  $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, 0)$ .

(b) (0.6 ptos.) Demuestra utilizando la definición que el siguiente conjunto es convexo:

$$\Omega_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 4z \leq 1 \}$$

(c) (0.6 ptos.) ¿Indica si la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2$  sobre  $\Omega = \mathbb{R}^2$  es convexa?

(d) (0.6 ptos.) ¿Qué longitud tendrá el intervalo resultante de aplicar en primer lugar 4 pasos del método de bisección y después 4 pasos del método de la sección áurea al intervalo  $[0, 2]$ ?

**Solución:** Resolveremos cada apartado

(a) Un simplex regular en  $\mathbb{R}^4$  es, como todo el mundo debería saber, un conjunto formado por 5 puntos o vértices equidistantes. Como tenemos uno de ellos  $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0, 0)$ , podemos obtener los restantes 4, que llamamos  $\mathbf{x}^1$ ,  $\mathbf{x}^2$ ,  $\mathbf{x}^3$  y  $\mathbf{x}^4$ , mediante la definición de sus coordenadas

$$\mathbf{x}_j^i = \begin{cases} \mathbf{x}_j^0 + \delta_1 & i = j \\ \mathbf{x}_j^0 + \delta_2 & j \neq j \end{cases} \implies \begin{cases} \delta_1 & i = j \\ \delta_2 & i \neq j \end{cases}$$

para  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Los valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  se pueden calcular mediante su definición, teniendo en cuenta que  $n = 4$  y  $\alpha = 2$

$$\delta_1 = \left[ \frac{(n+1)^{1/2} + n - 1}{n\sqrt{2}} \right] \alpha = \left[ \frac{(4+1)^{1/2} + 4 - 1}{4\sqrt{2}} \right] \times 2 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2\sqrt{2}} = 1.8512$$

$$\delta_2 = \left[ \frac{(n+1)^{1/2} - 1}{n\sqrt{2}} \right] \alpha = \left[ \frac{(4+1)^{1/2} - 1}{4\sqrt{2}} \right] \times 2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{2}} = 0.4370$$

Ahora es sencillo construir los vértices que faltan

$$\mathbf{x}^1 = \left( \overbrace{1.8512}^{x_1^1}, \overbrace{0.4370}^{x_2^1}, \overbrace{0.4370}^{x_3^1}, \overbrace{0.4370}^{x_4^1} \right)$$

$$\mathbf{x}^2 = (0.4370, 1.8512, 0.4370, 0.4370)$$

$$\mathbf{x}^3 = (0.4370, 0.4370, 1.8512, 0.4370)$$

$$\mathbf{x}^4 = (0.4370, 0.4370, 0.4370, 1.8512)$$

- (b) Hay que demostrar que si tenemos dos puntos del conjunto, la combinación lineal de esos puntos también estará en el conjunto, es decir hay que comprobar que

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Omega_1 \Rightarrow \lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v} \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Tomemos por tanto dos puntos en el conjunto  $\Omega_1$  que tendrán 3 coordenadas por ser un conjunto de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= (x_1, y_1, z_1) \in \Omega_1 \Rightarrow 2x_1 + 3y_1 + 4z_1 \leq 1 \\ \mathbf{v} &= (x_2, y_2, z_2) \in \Omega_1 \Rightarrow 2x_2 + 3y_2 + 4z_2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Tomemos ahora  $\lambda \in [0, 1]$  y construyamos una combinación lineal convexa de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  para ese valor

$$\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v} = \lambda(x_1, y_1, z_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2)$$

Si llamamos  $\mathbf{w}$  al vector resultante, es decir

$$\mathbf{w} = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) = (x_3, y_3, z_3)$$

hay que comprobar que  $\mathbf{w} \in \Omega_1$ , para ello solamente hay que comprobar que las coordenadas de  $\mathbf{w}$  cumplen la desigualdad que definen a  $\Omega_1$

$$2x_3 + 3y_3 + 4z_3 \leq 1$$

Sustituyendo cada coordenada por su valor en términos de las coordenadas de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  obtenemos

$$2(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + 3(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) + 4(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq 1$$

si sacamos factor común  $\lambda$  y  $(1 - \lambda)$

$$\lambda(2x_1 + 3y_1 + 4z_1) + (1 - \lambda)(2x_2 + 3y_2 + 4z_2) \leq 1$$

como las coordenadas de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  cumplen las desigualdades dadas en 1 tendremos

$$\lambda \underbrace{(2x_1 + 3y_1 + 4z_1)}_{\leq 1} + (1 - \lambda) \underbrace{(2x_2 + 3y_2 + 4z_2)}_{\leq 1} \leq \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$$

la desigualdad es cierta y  $\mathbf{w} \in \Omega_1$ , como el valor de  $\lambda$  es arbitrario en  $[0, 1]$ ,  $\Omega_1$  es convexo.

- (c) La función es suficientemente derivable así que podemos utilizar el teorema de caracterización de funciones convexas de segundo orden. Calcularemos el Hessiano de  $f(x, y)$  para comprobar su naturaleza

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2 \Rightarrow \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 12x \\ 4y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 12 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Este Hessiano es una matriz diagonal, luego es sencillo comprobar su naturaleza utilizando los elementos de la diagonal (que en este caso son los valores propios de la matriz):  $12x^2 + 12$  y  $12y^2$

$$12x^2 + 12 = 12 \underbrace{(x^2 + 1)}_{>0} > 0$$

$$12y^2 \geq 0$$

luego el hessiano es semidefinido positivo en cualquier punto de  $\mathbb{R}^2$  de donde deducimos que la función es convexa.

- (d) Recordemos aquí que cada paso del método de bipartición (y también el de bisección) reduce el intervalo en un factor  $1/2$ , mientras que el método de la sección áurea lo reduce, también en cada paso, en un factor  $\tau \cong 0.618$ . Por tanto si partimos del intervalo  $[0, 2]$  y aplicamos bipartición 4 veces y sección áurea otras 4, el intervalo final tendrá una longitud

$$\mathbf{L}_8 = (0.5)^4 \times (0.618)^4 \times \mathbf{L}_2 = (0.5)^4 \times (0.618)^4 \times 2 = 1.8233 \times 10^{-2} = 0.018233$$

Notar que esta reducción es independiente del orden en el que se apliquen los métodos.

2. (2.4 ptos.) Resuelve el siguiente problema utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{array}{l} \text{Optimizar} \\ \text{s.a.} \end{array} \left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = x + y + z \\ (y - 1)^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 3 \end{array} \right\}$$

**Solución:** Antes de aplicar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, realizamos unas consideraciones previas que nos ayudarán a resolver el problema.

Por una parte el conjunto factible de este problema es la intersección de 2 conjuntos

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y - 1)^2 + z^2 \leq 1 \right\} \quad (\text{cilindro}) \\ \Omega_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 3 \right\} \quad (\text{esfera}) \end{aligned}$$

Los conjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son de la forma

$$\Gamma_k = \{g_j(\mathbf{x}) \leq k\} \quad j = 1, 2$$

por tanto, si  $g_1(\mathbf{x})$  y  $g_2(\mathbf{x})$  fueran funciones convexas, podríamos asegurar que tanto  $\Omega_1$  como  $\Omega_2$  serían conjuntos convexas. Este hecho es muy fácil de demostrar, puesto que

$$g_1(x, y, z) = (y - 1)^2 + z^2$$

tiene como matriz hessiana

$$\mathbf{H}g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow g_1(x, y, z)$  es una función convexa y cualquier conjunto de la forma  $\Gamma_k = \{g_1(x) \leq k\}$  será convexo, en nuestro caso  $k = 1$ .

De la misma forma

$$g_2(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2$$

tiene como matriz hessiana

$$\mathbf{H}g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow g_2(x, y, z)$  es una función convexa y cualquier conjunto de la forma  $\Gamma_k = \{g_2(x) \leq k\}$  será convexo, en nuestro caso  $k = 3$ .

Puesto que  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son conjuntos convexas  $\Omega$  también será un conjunto convexo por ser la intersección de ambos. Podemos dar alguna información sobre los máximos y mínimos del problema. En primer lugar vemos que el conjunto factible es cerrado (contiene a la frontera) y acotado ( $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \Omega_2$ , que es una bola de centro  $(0, 1, 0)$  y radio  $\sqrt{3}$ ), por tanto es compacto y como la función es continua por ser una función polinomial por el teorema de Weierstrass la función tendrá un máximo y un mínimo sobre el conjunto factible, es decir, *el problema tiene solución*.

En segundo lugar vemos que la función objetivo es lineal y por tanto es cóncava y convexa a la vez. Con esta información podemos decir:

- Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo y compacto y tiene máximo en  $\Omega \Rightarrow$  El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.
- Como  $f$  es cóncava sobre  $\Omega$  convexo y compacto y tiene mínimo en  $\Omega \Rightarrow$  El mínimo se encuentra en la frontera del conjunto.
- Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo  $\Rightarrow$  Todo mínimo local es global.
- Como  $f$  es cóncava sobre  $\Omega$  convexo  $\Rightarrow$  Todo máximo local es global.
- Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo y  $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$  Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
- Como  $f$  es cóncava sobre  $\Omega$  convexo y  $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$  Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser máximo local, automáticamente lo será.

(g) Como  $\Omega$  es un conjunto convexo con interior no vacío -por ejemplo, el punto  $(0, 1, 0)$  está en su interior  $\Rightarrow$  Todos los puntos cumplen las hipótesis de cualificación de las restricciones.

$$(y-1)^2 + z^2 = (1-1)^2 + 0^2 = 0 < 1$$

$$0^2 + (y-1)^2 + z^2 = (1-1)^2 + 0^2 = 0 < 3$$

(h) Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces el mínimo y máximo globales, que existen por el teorema de Weierstrass, deben cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Utilizaremos ahora los multiplicadores para construir la función Lagrangiana

$$L(x, y, z) = x + y + z + \mu_1 \left( (y-1)^2 + z^2 - 1 \right) + \mu_2 \left( x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 \right)$$

y planteremos las condiciones de KKT:

(a) *Condición Estacionaria*

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_2 x = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_1 (y-1) + 2\mu_2 (y-1) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\mu_1 z + 2\mu_2 z = 0 \tag{4}$$

(b) *Condición de factibilidad*

$$\left( (y-1)^2 + z^2 - 1 \right) \leq 0$$

$$\left( x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 \right) \leq 0$$

(c) *Condición de positividad*

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0 \Rightarrow \text{Para mínimo}$$

$$\mu_1, \mu_2 \leq 0 \Rightarrow \text{Para máximo}$$

(d) *Condición de holgura*

$$\mu_1 g_1(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_1 \left( (y-1)^2 + z^2 - 1 \right) = 0 \tag{5}$$

$$\mu_2 g_2(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_2 \left( x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 \right) = 0 \tag{6}$$

El sistema que hay que resolver estará formado por las ecuaciones 2, 3, 4, 5 y 6.

Utilizamos el proceso usual para resolver el sistema anterior empleando en primer lugar las condiciones de holgura 5 y 6. Se distinguen cuatro casos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ (y-1)^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{Caso I} \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 = 0 & \text{Caso II} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{Caso III} \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 = 0 & \text{Caso IV} \end{array} \right.$$

Comprobamos cada uno de forma independiente:

- (a) **Caso I** ( $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ ): Este caso es imposible, puesto que sustituyendo en la primera ecuación del sistema (ecuación 2) obtenemos:  $1 = 0$
- (b) **Caso II** ( $\mu_1 = 0, x^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 3 = 0$ ): Sustituyendo el valor de  $\mu_1 = 0$  en las ecuaciones del sistema obtenemos

$$1 + 2\mu_2 x = 0 \quad (7)$$

$$1 + 2\mu_2 (y - 1) = 0 \quad (8)$$

$$1 + 2\mu_2 z = 0 \quad (9)$$

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 3 = 0 \quad (10)$$

Restando 7 y 8 obtenemos

$$(1 + 2\mu_2 x) - (1 + 2\mu_2 (y - 1)) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2 (x - y + 1) = 0$$

y como  $\mu_2$  no puede ser cero puesto que entonces la primera ecuación nos da  $1 = 0$  se llega a la conclusión de que

$$x - y + 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1 \quad (11)$$

Si restamos 7 y 9

$$(1 + 2\mu_2 x) - (1 + 2\mu_2 z) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2 (x - z) = 0$$

que nos proporciona (teniendo en cuenta que  $\mu_2 \neq 0$ )

$$x - z = 0 \quad (12)$$

Como  $x = y - 1 = z$ , sustituimos en 10

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1$$

Y por tanto

$$x = z = \pm 1$$

$$y = x + 1$$

Como  $x \neq 0$ , podemos despejar  $\mu_2$  de 7 (o de 9) para obtener su valor

$$\mu_2 = -\frac{1}{2x} = \mp \frac{1}{2}$$

Finalmente para este caso hemos obtenido 2 puntos

$$P_1 = (1, 2, 1) \quad \mu = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$P_2 = (-1, 0, -1) \quad \mu = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Sin embargo estos puntos no son factibles ya que

$$P_1 = (1, 2, 1) \Rightarrow (y - 1)^2 + z^2 = (2 - 1)^2 + (1)^2 = 2 \not\leq 1$$

$$P_2 = (-1, 0, -1) \Rightarrow (y - 1)^2 + z^2 = (0 - 1)^2 + (-1)^2 = 2 \not\leq 1$$

por tanto son puntos no válidos para el problema.

- (c) **Caso III** ( $(y - 1)^2 + z^2 - 1 = 0, \mu_2 = 0$ ): Este caso también es imposible, puesto que sustituyendo  $\mu_2 = 0$  en la ecuación 2 del sistema volvemos a obtener una inconsistencia del tipo  $1 = 0$ .

(d) **Caso IV**  $\left( (y-1)^2 + z^2 - 1 = 0, x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 = 0 \right)$ : En este último caso el sistema que hay que resolver es

$$1 + 2\mu_2 x = 0 \quad (13)$$

$$1 + 2\mu_1 (y-1) + 2\mu_2 (y-1) = 0 \quad (14)$$

$$1 + 2\mu_1 z + 2\mu_2 z = 0 \quad (15)$$

$$(y-1)^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (16)$$

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 = 0 \quad (17)$$

La operación que debemos hacer a continuación está muy clara, restar las ecuaciones 16 y 17 para obtener

$$\left( (y-1)^2 + z^2 - 1 \right) - \left( x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3 \right) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Si ahora sustituimos el valor de  $x$  encontrado en 13 obtenemos el valor de  $\mu_2$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2(\pm\sqrt{2})} = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Si ahora restamos 14 y 15

$$(1 + 2\mu_1 (y-1) + 2\mu_2 (y-1)) - (1 + 2\mu_1 z + 2\mu_2 z) = 0$$

Y agrupando y sacando factor común obtenemos

$$2\mu_1 (y-1-z) + 2\mu_2 (y-1-z) = 0 \Leftrightarrow 2(\mu_1 + \mu_2)(y-1-z) = 0$$

Esta ecuación nos proporciona 2 opciones. La primera de ellas es

$$\mu_1 + \mu_2 = 0$$

que no nos produce ningún punto, puesto que en este caso

$$\mu_1 = -\mu_2$$

y como  $\mu_2 \neq 0$ , los dos multiplicadores tendrían distinto signo y en los mínimos y máximos locales los multiplicadores deben tener el mismo signo. Nos queda solamente el segundo caso:

$$y-1-z=0 \Leftrightarrow y-1=z$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación 16

$$(y-1)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mientras que  $y$  será

$$y = 1 + z = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por último nos queda por determinar el valor de  $\mu_1$ , para ello utilizamos la ecuación 15

$$1 + 2\mu_1 z + 2\mu_2 z = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2 - \frac{1}{2z}$$

Teniendo en cuenta los distintos valores para  $\mu_2$  (2 valores) y  $z$  (otros 2), las posibles opciones son

$$\mu_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (18)$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (19)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (20)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (21)$$

Los casos 19 y 20 no sirven puesto que los multiplicadores  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen distinto signo.

Finalmente quedan dos puntos

$$P_3 = \left( \sqrt{2}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \mu = \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$P_4 = \left( -\sqrt{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \mu = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

que son factibles y cumplen las condiciones de KKT para ser máximo local y mínimo local respectivamente, como se ha comprobado al principio, el problema tenía solución y ésta debía encontrarse mediante las condiciones de KKT, como  $P_3$  y  $P_4$  son los únicos puntos que cumplen dichas condiciones, esto implica que son los máximo ( $P_3$ ) y mínimo ( $P_4$ ) globales del problema.

3. Una determinada empresa fabrica 3 productos:  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  que necesitan 3 procesos: elaboración, ensamblaje y acabado. El gerente ha planteado el siguiente problema de programación lineal con el fin de obtener el máximo beneficio semanal en euros; teniendo en cuenta los tiempos necesarios para la fabricación de los 3 productos y el tiempo disponible para cada proceso:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && 30x_1 + 20x_2 + 60x_3 \\ &\text{Sujeto a} && \\ &&& 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 40 \quad (\text{horas elaboración}) \\ &&& 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 16 \quad (\text{horas ensamblaje}) \\ &&& 6x_1 + x_2 + 8x_3 \leq 48 \quad (\text{horas acabado}) \\ &&& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Una vez puesto el problema en forma estándar, se ha resuelto mediante el método simplex y se ha obtenido la siguiente tabla óptima:

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$ |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|
| $x_2$   | -2    | 1     | 0     | 1       | -2      | 0       | 8   |
| $x_3$   | 5/4   | 0     | 1     | -1/4    | 3/4     | 0       | 2   |
| $x_6^h$ | -2    | 0     | 0     | 1       | -4      | 1       | 24  |
|         | 5     | 0     | 0     | 5       | 5       | 0       | 280 |

Responde de forma independiente a los siguientes apartados utilizando análisis post-óptimo:

- (a) (1.0 pto.) Calcula el valor o valores de  $\lambda$  para que la base óptima no cambie cuando el término independiente es de la forma  $b' = \begin{pmatrix} 40 + \lambda \\ 16 + \lambda \\ 48 - 2\lambda \end{pmatrix}$ . Calcula la nueva solución óptima del problema para  $\lambda = 6$ .
- (b) (1.0 pto.) Calcula la nueva solución óptima si el beneficio del producto  $x_3$  pasa a valer 56 euros. ¿Es única esta nueva solución? En caso negativo indica todas las posibles soluciones, en caso afirmativo indica porqué.
- (c) (0.4 ptos.) Calcula la nueva solución si el beneficio del producto  $x_1$  aumenta a 34.

**Solución:** Resolvemos cada apartado de forma independiente.

(a) Se trata de un cambio en el vector de recursos, donde se cambia el vector original  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 16 \\ 48 \end{pmatrix}$  por el vector

$\mathbf{b}'(\lambda) = \begin{pmatrix} 40 + \lambda \\ 16 + \lambda \\ 48 - 2\lambda \end{pmatrix}$  dependiente del parámetro  $\lambda$ . Se pide que no cambie la base óptima, por tanto la solución

básica que se obtenga para los valores de  $\mathbf{b}'$  debe ser factible, es decir debe ser  $\mathbf{b}'(\lambda) \geq 0$ , obviamente esa solución dependerá de  $\lambda$ . La solución básica que se obtiene para cada valor de  $\lambda$  viene dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{x}'_B(\lambda) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'(\lambda)$$

El valor de  $\mathbf{B}^{-1}$  se puede obtener directamente de la tabla, en el lugar de las variables de holgura (por ser un problema de  $\leq$ ) o bien teniendo en cuenta que

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_6^h) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

y calculando su inversa, naturalmente el primer procedimiento es más sencillo:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución básica será

$$\mathbf{x}'_B(\lambda) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 + \lambda \\ 16 + \lambda \\ 48 - 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \lambda \\ 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ 24 - 5\lambda \end{pmatrix} \quad (22)$$

Si no queremos cambios en la base óptima esta solución debe ser  $\geq 0 \Rightarrow$

$$8 - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 8$$

$$2 + \frac{1}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -4$$

$$24 - 5\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{24}{5}$$

La intersección de las tres regiones nos da un rango para  $\lambda$

$$-4 \leq \lambda \leq \frac{24}{5} \leq 8$$

y la base no cambiará mientras que  $\lambda \in [-4, 24/5]$

Para resolver la segunda parte del apartado, observamos que  $\lambda = 6 \notin [-4, 24/5]$  y por tanto la nueva solución básica que se obtenga para este valor no será factible. Sustituimos  $\lambda = 6$  en 22

$$\mathbf{x}'_B(6) = \begin{pmatrix} 8 - \lambda \\ 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ 24 - 5\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=6} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

que no es factible, pero sí factible dual, luego habrá que actualizar la tabla con los nuevos datos y aplicar el método simplex dual.

En este caso, la tabla queda

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$ |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|
| $x_2$   | -2    | 1     | 0     | 1       | -2      | 0       | 2   |
| $x_3$   | 5/4   | 0     | 1     | -1/4    | 3/4     | 0       | 5   |
| $x_6^h$ | -2    | 0     | 0     | 1       | -4      | 1       | -6  |
|         | 5     | 0     | 0     | 5       | 5       | 0       | 340 |

observa que el valor de la función objetivo también cambia, puesto que han cambiado los valores de la solución básica. Aplicamos el método simplex dual, utilizando los criterios correspondientes de salida (sale una variable

básica con valor negativo) y entrada (entra la variable no básica que da el mínimo cociente  $-r_k/y_{pk}$  con  $y_{pk} < 0$ )

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$ |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|
| $x_2$   | -2    | 1     | 0     | 1       | -2      | 0       | 2   |
| $x_3$   | 5/4   | 0     | 1     | -1/4    | 3/4     | 0       | 5   |
| $x_6^h$ | -2    | 0     | 0     | 1       | -4      | 1       | -6  |
|         | 5     | 0     | 0     | 5       | 5       | 0       | 340 |

Pivotando sobre  $-4$  se obtiene la tabla

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$   |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-------|
| $x_2$   | -1    | 1     | 0     | 1/2     | 0       | -1/2    | 5     |
| $x_3$   | 7/8   | 0     | 1     | -1/16   | 0       | 3/16    | 31/8  |
| $x_6^h$ | 1/2   | 0     | 0     | -1/4    | 1       | -1/4    | 3/2   |
|         | 5/2   | 0     | 0     | 25/4    | 0       | 5/4     | 665/2 |

que es óptima.

- (b) Para resolver este apartado hay que tener en cuenta que el problema actual se ha resuelto mediante el método simplex poniendo el problema original en forma estándar con objetivo de minimización y por tanto habrá que cambiar el signo de los coeficiente de la función objetivo para el cálculo de los coeficientes de coste de las variables no básicas:

$$r_k = c_k^{\min} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_k$$

Recordemos que el producto  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_k$  también lo podemos encontrar en la tabla final, en la columna  $k$ . Como se trata de un cambio en una variable básica, tendremos que calcular los nuevos coeficientes de coste relativo para todas las variables no básicas.

$$r'_1 = c_1^{\min} - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1 = -30 - (-20, -56, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5/4 \\ -2 \end{pmatrix} = -30 - (-30) = 0 \geq 0$$

$$r'_4 = c_4^{\min} - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_4 = 0 - (-20, -56, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix} = -(-6) = 6 \geq 0$$

$$r'_5 = c_5^{\min} - \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_5 = 0 - (-20, -56, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3/4 \\ -4 \end{pmatrix} = -(-2) = 2 \geq 0$$

Los nuevos coeficientes de coste relativo son  $\geq 0$ , y por tanto la solución actual sigue siendo óptima; sin embargo, como uno de los coeficientes de coste es 0, hay soluciones alternativas, por ejemplo la variable  $x_1$  (la variable con  $r_1 = 0$ ) puede entrar en la base y en este caso la tabla queda como

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$ |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|
| $x_2$   | -2    | 1     | 0     | 1       | -2      | 0       | 8   |
| $x_3$   | 5/4   | 0     | 1     | -1/4    | 3/4     | 0       | 2   |
| $x_6^h$ | -2    | 0     | 0     | 1       | -4      | 1       | 24  |
|         | 0     | 0     | 0     | 6       | 2       | 0       | 272 |

Notar el cambio en el valor de la función objetivo, puesto que ha cambiado uno de sus coeficientes.

Podemos ahora incorporar en la base a la variable  $x_1$  que echará de la base a la única alternativa posible: la variable  $x_3$  (es la única con pivote positivo)

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$   |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-------|
| $x_2$   | 0     | 1     | 8/5   | 3/5     | -4/5    | 0       | 56/5  |
| $x_1$   | 1     | 0     | 4/5   | -1/5    | 3/5     | 0       | 8/5   |
| $x_6^h$ | 0     | 0     | 8/5   | 3/5     | -14/5   | 1       | 136/5 |
|         | 0     | 0     | 0     | 6       | 2       | 0       | 272   |

La última fila no sufre modificaciones, el valor óptimo es el mismo y tenemos otra solución óptima del problema. En un problema convexo (se debería saber que todos los problemas lineales lo son) cuando tenemos dos soluciones óptimas, los puntos del segmento que las une también son soluciones óptimas, por tanto si  $\mathbf{x}^0 = (0, 8, 2)$  es la

solución inicial y  $\mathbf{x}^1 = (8/5, 56/5, 0)$  es una solución alternativa, el segmento lineal que las une se puede definir (como ya sabemos) como

$$\mathbf{x}(\lambda) = \lambda(0, 8, 2) + (1 - \lambda)(8/5, 56/5, 0) = \left( (1 - \lambda)8/5, \frac{56}{5} - \frac{6}{5}\lambda, 2\lambda \right) \quad \lambda \in [0, 1]$$

que serán todas soluciones óptimas

- (c) En este caso, se ha modificado el coeficiente de beneficio de una variable no básica, por tanto solamente cambiará su coeficiente de coste relativo, que podremos calcular mediante la fórmula correspondiente

$$r'_1 = c_1^{\min} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1 = -34 - (-20, -60, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5/4 \\ -2 \end{pmatrix} = -34 - (-35) = 1 > 0$$

que sigue siendo positivo, luego no hay cambios en la base óptima y la solución actual sigue siendo válida. Observamos de nuevo que se les ha cambiado el signo a los coeficientes de la función objetivo para ponerlos en la forma estándar.

4. Un viticultor embotella y comercializa 3 tipos de vino: *Tintorro*, *Blanquito* y *Consiconá*. Por cada cuba de vino obtiene un beneficio de 500, 250 y 200 euros respectivamente. Cada cuba ha de pasar por tres fases: llenado, precintado y control de calidad. En la primera fase se pueden emplear hasta un máximo de 640 horas semanales y en la segunda hasta un máximo de 900 horas semanales, mientras que el número de horas semanales disponibles para la fase de calidad es de 330 horas semanales. el número de horas que una cuba necesita en cada fase viene dado por la tabla siguiente:

|           | Llenado | Precintado | Calidad |
|-----------|---------|------------|---------|
| Tintorro  | 16      | 30         | 3       |
| Blanquito | 4       | 5          | 2       |
| Consiconá | 6       | 10         | 1       |

- (a) (0.6 ptos.) Plantea el problema lineal correspondiente para maximizar el beneficio.  
 (b) (0.8 ptos.) Resuelve el problema lineal anterior.

**Solución:** Resolvemos cada apartado

- (a) El planteamiento del problema es muy sencillo, ya están las variables definidas  $x_i$ : cubas de cada tipo de vino 1, 2, 3

Las restricciones son: *Llenado, precintado, calidad y no negatividad*, estas restricciones permiten modelar el problema como

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad 500x_1 + 250x_2 + 200x_3 \quad (\text{Beneficio}) \\ \text{Sujeto a} \quad 16x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 640 \quad (\text{Llenado}) \\ \quad \quad \quad 30x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 900 \quad (\text{Precintado}) \\ \quad \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 330 \quad (\text{Calidad}) \\ \quad \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \quad (\text{No negatividad}) \end{array} \right\}$$

La disponibilidad no presupone la utilización completa del recurso.

- (b) La solución se consigue poniendo el problema en la forma estándar y aplicando el método simplex

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad -500x_1 - 250x_2 - 200x_3 \\ \text{Sujeto a} \quad 16x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 640 \\ \quad \quad \quad 30x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_5 = 900 \\ \quad \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 330 \\ \quad \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La tabla inicial es

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$ |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|
| $x_4^h$ | 16    | 4     | 6     | 1       | 0       | 0       | 640 |
| $x_5^h$ | 30    | 5     | 10    | 0       | 1       | 0       | 900 |
| $x_6^h$ | 3     | 2     | 1     | 0       | 0       | 1       | 330 |
|         | -500  | -250  | -200  | 0       | 0       | 0       | 0   |

que ya es la primera tabla simplex utilizando las variables de holgura como las primeras variables básicas. Utilizamos los criterios de entrada y salida del cespud y pivotamos sobre el elemento  $\boxed{30}$ , obtenemos la siguiente tabla

|         | $x_1$ | $x_2$         | $x_3$  | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$   |
|---------|-------|---------------|--------|---------|---------|---------|-------|
| $x_4^h$ | 0     | $\boxed{4/3}$ | 2/3    | 1       | -8/15   | 0       | 160   |
| $x_1$   | 1     | 1/6           | 1/3    | 0       | 1/30    | 0       | 30    |
| $x_6^h$ | 0     | 3/2           | 0      | 0       | -1/10   | 1       | 240   |
|         | 0     | -500/3        | -100/3 | 0       | 50/3    | 0       | 15000 |

que no es óptima, así que damos un nuevo paso en el método simplex, pivotando sobre  $\boxed{4/3}$ , para obtener

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$        | $x_6^h$ | $b$    |
|---------|-------|-------|-------|---------|----------------|---------|--------|
| $x_2$   | 0     | 1     | 1/2   | 3/4     | -2/5           | 0       | 120    |
| $x_1$   | 1     | 0     | 1/4   | -1/8    | $\boxed{1/10}$ | 0       | 10     |
| $x_6^h$ | 0     | 0     | -3/4  | -9/8    | 1/2            | 1       | 60     |
|         | 0     | 0     | 50    | 125     | -50            | 0       | -35000 |

|         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$    |
|---------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|--------|
| $x_2$   | 4     | 1     | 3/2   | 1/4     | 0       | 0       | 160    |
| $x_5^h$ | 10    | 0     | 5/2   | -5/4    | 1       | 0       | 100    |
| $x_6^h$ | -5    | 0     | -2    | -1/2    | 0       | 1       | 10     |
|         | 500   | 0     | 175   | 125/2   | 0       | 0       | -40000 |

que es la tabla óptima. Si observamos la base óptima formada por los vectores  $A_2$ ,  $A_5$  y  $A_6$ , vemos que hubiera sido posible obtener la tabla óptima en un sólo paso, si en vez de elegir el coeficiente de coste relativo más negativo hubieramos utilizado el de  $x_2$ , la tabla original es

|         | $x_1$ | $x_2$       | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$ |               | $x_1$   | $x_2$ | $x_3$ | $x_4^h$ | $x_5^h$ | $x_6^h$ | $b$    |     |
|---------|-------|-------------|-------|---------|---------|---------|-----|---------------|---------|-------|-------|---------|---------|---------|--------|-----|
| $x_4^h$ | 16    | $\boxed{4}$ | 6     | 1       | 0       | 0       | 640 | $\Rightarrow$ | $x_2$   | 4     | 1     | 3/2     | 1/4     | 0       | 0      | 160 |
| $x_5^h$ | 30    | 5           | 10    | 0       | 1       | 0       | 900 |               | $x_5^h$ | 10    | 0     | 5/2     | -5/4    | 1       | 0      | 100 |
| $x_6^h$ | 3     | 2           | 1     | 0       | 0       | 1       | 330 |               | $x_6^h$ | -5    | 0     | -2      | -1/2    | 0       | 1      | 10  |
|         | -500  | -250        | -200  | 0       | 0       | 0       | 0   |               | 500     | 0     | 175   | 125/2   | 0       | 0       | -40000 |     |

Si elegimos  $x_2$  como variable de entrada, vemos que la variable  $x_4^h$  es la variable de salida y 4 sería el pivote y al pivotar sobre él obtendríamos la tabla óptima buscada.

5. Dado el siguiente problema variacional

$$\text{Minimizar } J(y) = \int_0^{\pi/2} [y^2 - (y')^2] dx$$

$$y(0) \text{ libre}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- (a) (0.8 pts.) Resuelve, si es posible, el problema anterior.
- (b) (0.6 pts.) Indica lo que ocurre con la solución anterior si cambiamos la segunda condición por la siguiente:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

**Solución:** En ambos casos necesitamos las ecuaciones de Euler-Lagrange con

$$f(x, y, y') = y^2 - (y')^2$$

calculamos cada componente de la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -2y' \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = -2y''$$

e igualando

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow 2y = -2y'' \Leftrightarrow 2y + 2y'' = 0$$

de donde se obtiene

$$y'' + y = 0$$

Esta es una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes que resolvemos utilizando las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

que son complejas:  $\lambda = \pm i$ . La solución general es

$$y(x) = A \cos x + B \sin x$$

Para el cálculo de  $A$  y  $B$  necesitamos las condiciones iniciales.

(a) Aplicamos las condiciones

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y(0) \text{ libre} \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -2y'(0) = 0$$

Derivando  $y(x)$

$$y'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

y evaluando en 0

$$y'(0) = -A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0$$

condición que se cumple siempre, de ahí que la solución buscada sea

$$y(x) = A \cos x$$

(b) En este caso

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot 1 = 1 \Rightarrow B = 1$$

pero la segunda condición no ha cambiado y por tanto

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -2y'(0) = 0$$

lo que implica

$$y'(0) = -A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \Rightarrow B = 0$$

de forma que  $B$  tiene que tomar dos valores distintos, por tanto no existe solución en este caso.