



1. (1.2 ptos.) Dada la función:

$$f(x) = e^{-x} + (x - 4)^2$$

Sabiendo que el mínimo de  $f(x)$  está en el intervalo  $[3, 5]$ : Da 2 pasos del método de la sección áurea para reducir este intervalo. Indica qué punto propondrías como solución aproximada del problema después de estas 2 iteraciones y da una cota del error cometido con esta aproximación. **OBSERVACIÓN:** Utiliza en todos los cálculos 4 cifras decimales significativas por redondeo.

**Solución:** Tomaremos el valor de  $\tau = 0.6180$ , siendo  $1 - \tau = 0.3820$ .

1. *1ª iteración.* En la primera iteración es necesario calcular los dos puntos interiores al intervalo. Los datos en esta primera iteración son:

$$\begin{aligned} I_0 &= [a_0, b_0] = [3, 5] \\ L_0 &= 2 \end{aligned}$$

Calculamos los puntos interiores y sus correspondientes valores en  $f(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= a_0 + (1 - \tau)L_0 = 3 + 0.382 \cdot 2 = 3.7640 & \left| \begin{array}{l} f(\lambda_0) = 0.0789 \\ f(\mu_0) = 0.0702 \end{array} \right. \\ \mu_0 &= a_0 + \tau L_0 = 3 + 0.6180 \cdot 2 = 4.2360 \end{aligned}$$

como

$$f(\lambda_0) > f(\mu_0)$$

la situación para la siguiente iteración es

$$\begin{aligned} I_1 &= [a_1, b_1] = [\lambda_0, b_0] = [3.7640, 5] \\ L_1 &= b_1 - a_1 = 1.2360 \end{aligned}$$

2. *2ª iteración.* Repetimos el proceso de la iteración anterior tomando como punto de partida el intervalo  $I_1$  y teniendo en cuenta que solamente es necesario calcular un nuevo punto interior, ya que  $\lambda_1$  es conocido:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_0 = 4.2360 & \left| \begin{array}{l} f(\lambda_1) = 0.0702 \\ f(\mu_1) = 0.2894 \end{array} \right. \\ \mu_1 &= a_1 + \tau L_1 = 3.7640 + 0.6180 \cdot 2 = 4.5278 \end{aligned}$$

como ahora

$$f(\mu_1) > f(\lambda_1)$$

el nuevo intervalo es

$$\begin{aligned} I_2 &= [a_2, b_2] = [a_1, \mu_1] = [3.7640, 4.5278] \\ L_2 &= b_2 - a_2 = 0.7638 \end{aligned}$$

La solución propuesta después de estas dos iteraciones es el punto medio del intervalo porque es el punto que menor cota de error tiene

$$x^* = \frac{3.7640 + 4.5278}{2} = 4.1459$$

$$|\varepsilon_{x^*}| \leq \frac{L_2}{2} = 0.3819$$

2. (1 pto.) Dada la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y)$$

encuentra de forma razonada, si existen, todos sus extremos locales y globales sobre el espacio  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución:** Se trata de una función de clase  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , y como  $\Omega = \mathbb{R}^2$  es abierto, entonces todos los puntos locales deben cumplir las condiciones necesarias de primer orden, es decir, deben ser puntos críticos de  $f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Evaluando el gradiente de  $f(x, y)$  e igualando a cero, tendremos

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) \cos(y) \\ -\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} \cos(x) = 0 \\ \cos(y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2} \quad k_1 \in \mathbb{Z} \quad (\text{Caso A}) \\ y = (2k_2 + 1) \frac{\pi}{2} \quad k_2 \in \mathbb{Z} \quad (\text{Caso B}) \end{array} \right\}$$

Llevamos cada uno de los casos a la segunda ecuación para obtener

1. Caso A:  $x = (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left((2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(y) = 0 \Leftrightarrow (-1)^{k_1} \operatorname{sen}(y) = 0$$

luego

$$\operatorname{sen}(y) = 0$$

y obtenemos

$$y = k_3\pi \quad \forall k_3 \in \mathbb{Z}$$

2. Caso B:  $x = (2k_2 + 1) \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left((2k_2 + 1) \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(y) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) (-1)^{k_2} = 0$$

luego

$$\operatorname{sen}(x) = 0$$

y obtenemos

$$x = k_4\pi \quad \forall k_4 \in \mathbb{Z}$$

Tendremos como soluciones

$$P_1(k_1, k_3) = \left( (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}, k_3\pi \right)$$

$$P_2(k_4, k_2) = \left( k_4\pi, (2k_2 + 1) \frac{\pi}{2} \right)$$

con  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4 \in \mathbb{Z}$ . Habrá por tanto infinitos puntos críticos.

Para comprobar la naturaleza de estos puntos recurriremos al Hessiano de  $f(x, y)$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(x) \cos(y) & -\cos(x) \operatorname{sen}(y) \\ -\cos(x) \operatorname{sen}(y) & -\operatorname{sen}(x) \cos(y) \end{bmatrix}$$

Evaluando en los puntos de la forma

$$P_1(k_1, k_3) = \left( (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}, k_3\pi \right)$$

obtenemos

$$Hf(P_1(k_1, k_3)) = \begin{bmatrix} -(-1)^{k_1}(-1)^{k_3} & 0 \\ 0 & -(-1)^{k_1}(-1)^{k_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{k_1+k_3+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k_1+k_3+1} \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Si } k_1 + k_3 + 1 = 2n &\Rightarrow P_1(k_1, k_3) \text{ es un m\u00ednimo local estricto} \\ \text{Si } k_1 + k_3 = 2n &\Rightarrow P_2(k_1, k_3) \text{ es un m\u00e1ximo local estricto} \end{aligned}$$

Notar que sustituyendo en la funci\u00f3n objetivo para estos puntos obtenemos

$$f(P_1(k_1, k_3)) = \text{sen}\left((2k_1 + 1)\frac{\pi}{2}\right) \cos(k_3\pi) = (-1)^{k_1}(-1)^{k_3} = (-1)^{k_1+k_3}$$

luego

$$\begin{aligned} \text{Si } k_1 + k_3 + 1 = 2n &\Rightarrow f(P_1(k_1, k_3)) = -1 \\ \text{Si } k_1 + k_3 = 2n &\Rightarrow P_2(k_1, k_3) \Rightarrow f(P_1(k_1, k_3)) = 1 \end{aligned}$$

que son los valores m\u00ednimo y m\u00e1ximo que puede tomar la funci\u00f3n  $f(x, y)$  ya que

$$|f(x, y)| = |\text{sen}(x) \cos(y)| \leq |\text{sen}(x)| |\cos(y)| \leq 1$$

de ah\u00ed que estos puntos sean adem\u00e1s de extremos locales, tambi\u00e9n globales.

Para los puntos de la forma

$$P_2(k_4, k_2) = \left(k_4\pi, (2k_2 + 1)\frac{\pi}{2}\right)$$

obtenemos

$$Hf(P_2(k_4, k_2)) = \begin{bmatrix} 0 & -(-1)^{k_4}(-1)^{k_2} \\ -(-1)^{k_4}(-1)^{k_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k_2+k_4+1} \\ (-1)^{k_2+k_4+1} & 0 \end{bmatrix}$$

que es indefinida para cualquier valor de  $k_2$  y  $k_4$ , por tanto en  $P_2(k_4, k_2)$  la funci\u00f3n tiene puntos de silla. El valor de la funci\u00f3n en estos puntos es

$$f\left(k_4\pi, (2k_2 + 1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

*Soluci\u00f3n Alternativa:* Teniendo en cuenta que la funci\u00f3n  $f(x, y)$  es peri\u00f3dica de periodo  $2\pi$  en ambas coordenadas, podemos por tanto estudiar qu\u00e9 ocurre en el intervalo  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  y el resultado se repetir\u00e1 peri\u00f3dicamente. En ese cuadrado de lado  $2\pi$  tenemos

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos(x) \cos(y) \\ -\text{sen}(x) \text{sen}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuaci\u00f3n obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \cos(x) &= 0 \\ \cos(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ y &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \right\}$$

y sustituyendo en la segunda

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen } y = 0 \Leftrightarrow y = 0, \pi$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{sen } y = 0 \Leftrightarrow y = 0, \pi$$

$$y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}(x) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$$

$$y = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{sen } x \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$$

luego los puntos cr\u00edticos son

$P_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
$P_3 = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$P_4 = \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$
$P_5 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$P_6 = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$
$P_7 = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$	$P_8 = \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Utilizando la matriz Hessiana de  $f(x, y)$  en cada uno de los puntos tenemos

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(x) \cos(y) & -\cos(x) \operatorname{sen}(y) \\ -\cos(x) \operatorname{sen}(y) & -\operatorname{sen}(x) \cos(y) \end{bmatrix}$$

$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$Hf(P_4) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$Hf(P_5) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$Hf(P_6) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$Hf(P_7) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$Hf(P_8) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Se observa que

$Hf(P_1)$  y  $Hf(P_4)$  son definidas negativas, luego  $P_1$  y  $P_4$  son máximos locales estrictos

$Hf(P_2)$  y  $Hf(P_3)$  son definidas positivas, luego  $P_2$  y  $P_3$  son mínimos locales estrictos

$Hf(P_5)$ ,  $Hf(P_6)$ ,  $Hf(P_7)$  y  $Hf(P_8)$  son indefinidas, luego son puntos de silla

Además

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(P_4) = 1 \text{ y son máximos globales} \\ f(P_2) &= f(P_3) = -1 \text{ y son mínimos globales} \end{aligned}$$

### 3. (1 pts.) Considera el problema

$$\text{Minimizar } f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y$$

Partiendo del punto  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$  y como error  $\varepsilon = 0.001$ , da 2 pasos del método de descenso coordenado cíclico para buscar el mínimo de  $f(\mathbf{x})$ . **NO SE ADMITIRÁ COMO VÁLIDO NINGÚN OTRO MÉTODO.**

**Solución:** Recordemos que en este método se busca el mínimo a lo largo de cada eje coordenado antes de alcanzar el siguiente punto en la sucesión.

1. *1ª Iteración.* Tomamos  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_0$  y buscamos en primer lugar el mínimo en la dirección del eje  $x$ ,

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 = (0, 0) + \lambda_1 (1, 0) = (\lambda_1, 0)$$

y  $\lambda_1$  lo obtenemos al resolver el problema

$$\text{Minimizar}_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda, 0) = g_1(\lambda) = \lambda^2$$

cuya solución se obtiene por los métodos usuales de derivar e igualar a 0

$$g_1'(\lambda) = 2\lambda \Rightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

$$g_1''(\lambda) = 2 > 0 \Rightarrow g_1''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ es un mínimo}$$

luego

$$\mathbf{y}_2 = (0, 0)$$

A continuación buscamos el mínimo en la dirección del eje  $y$ , pero utilizando como punto de partida el obtenido en el paso anterior.

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = (0, 0) + \lambda_2 (0, 1) = (0, \lambda_2)$$

y  $\lambda_2$  lo obtenemos al resolver el problema

$$\text{Minimizar}_{\lambda \in \mathbb{R}} f(0, \lambda) = g_2(\lambda) = 2\lambda^2 + 2\lambda$$

cuya solución se obtiene por los métodos usuales de derivar e igualar a 0

$$g_2'(\lambda) = 4\lambda + 2 \Rightarrow 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$g_2''(\lambda) = 4 > 0 \Rightarrow g_2''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2} \text{ es un mínimo}$$

y el punto obtenido es

$$\mathbf{y}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

Como ya no quedan más direcciones coordenadas en las que buscar el siguiente punto en la sucesión es

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

Utilizamos a continuación el criterio de parada para saber si es necesaria otra iteración:

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \left\| \left(0, -\frac{1}{2}\right) - (0, 0) \right\| = \frac{1}{2} > 0.001$$

por tanto hay que utilizar otra iteración.

2. *2ª Iteración.* Ahora  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$  y buscamos en primer lugar el mínimo en la dirección del eje  $x$ ,

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \left(0, -\frac{1}{2}\right) + \lambda_1 (1, 0) = \left(\lambda_1, -\frac{1}{2}\right)$$

de nuevo  $\lambda_1$  lo obtenemos al resolver el problema

$$\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\text{Minimizar}} f\left(\lambda, -\frac{1}{2}\right) = g_1(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2} + \lambda$$

cuya solución se obtiene de nuevo derivando  $g_1(\lambda)$ , e igualando a 0

$$\begin{aligned} g_1'(\lambda) &= 2\lambda + 1 \Rightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \\ g_1''(\lambda) &= 2 > 0 \Rightarrow g_1''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ es un mínimo} \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{y}_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

A continuación buscamos el mínimo en la dirección del eje  $y$ , utilizando como punto de partida el obtenido en el paso anterior.

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 (0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \lambda_2\right)$$

y  $\lambda_2$  lo obtenemos al resolver el problema

$$\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\text{Minimizar}} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \lambda_2\right) = g_2(\lambda) = \frac{1}{4} + 2\left(-\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \lambda\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + \lambda\right)$$

resolvemos de la forma usual

$$\begin{aligned} g_2'(\lambda) &= 4\left(-\frac{1}{2} + \lambda\right) + 1 + 2 \Rightarrow -2 + 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \\ g_2''(\lambda) &= 4 > 0 \Rightarrow g_2''\left(-\frac{1}{4}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4} \text{ es un mínimo} \end{aligned}$$

y el punto obtenido es

$$\mathbf{y}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

Como ya no quedan más direcciones coordenadas en las que buscar el siguiente punto en la sucesión es

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

Y utilizamos a continuación el criterio de parada para saber si sería necesaria otra iteración:

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) - \left(0, -\frac{1}{2}\right) \right\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \right\| = \sqrt{\frac{5}{16}} = 0.559016 > 0.001$$

por tanto habría que realizar otra iteración.

4. (2.2 ptos.) Dada el problema

$$\text{Optimizar } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

sobre el conjunto

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 1\}$$

Discute sobre su convexidad y encuentra, si existen los extremos locales y globales de  $f(x, y, z)$  sobre  $\Omega$ . CUALQUIER RESULTADO OBTENIDO DEBE ESTAR RAZONADO ADECUADAMENTE, ES DECIR, SI UN PUNTO ES EXTREMO PORQUÉ DEBE SER ASÍ. EMPLEA EN TODOS LOS CÁLCULOS LOS VALORES EXACTOS.

**Solución:**

El conjunto factible es

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 1\} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

siendo

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y, z) \leq 4\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1\}$$

El conjunto  $\Omega_1$  será convexo si la función  $g_1(x, y, z)$  es convexa, como  $g_1(x, y, z)$  es de clase  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$  podemos utilizar la matriz hessiana para establecer su convexidad

$$Hg_1(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva en  $\mathbb{R}^3$  y por la caracterización de segundo orden de funciones convexas,  $g_1$  es una función convexas.

El conjunto  $\Omega_2$  es un semiespacio, por tanto, también es un conjunto convexo. Como  $\Omega$  es la intersección de dos conjuntos convexas, es también un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^3$

La función objetivo

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

es también una función convexa, puesto que es de clase  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$  y su matriz hessiana es

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es definida positiva.

El problema es convexo, es decir, la función objetivo  $f(x)$  es una función convexa y el conjunto factible  $\Omega$  es un conjunto convexo. Ahora bien teniendo en cuenta que  $f(x, y, z)$  es una función continua (es un polinomio) sobre un compacto (es cerrado -contiene a la frontera- y acotado -está dentro de una esfera de radio 2-) podemos decir:

1. Por el teorema de Weierstrass, la función  $f(x, y, z)$  tiene máximo y mínimo (global) sobre el conjunto  $\Omega$ .
2. Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo y compacto, y por el apartado anterior, tiene máximo  $\Rightarrow$  El máximo se encuentra en la frontera del conjunto.
3. Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo  $\Rightarrow$  Todo mínimo local es global
4. Como  $f$  es convexa sobre  $\Omega$  convexo y  $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$  Un punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para ser mínimo local, automáticamente lo será.
5. Como  $\Omega$  es un conjunto convexo con interior no vacío -por ejemplo, el origen  $(0, 0, 0)$  está en su interior  $\Rightarrow$  Todos los puntos cumplen las hipótesis de cualificación de las restricciones.
6. Un extremo global es también un extremo local, pero como cualquier punto factible cumple por el apartado anterior, las hipótesis de cualificación de las restricciones, entonces un mínimo global debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Por la última propiedad del apartado anterior, los puntos solución del problema deben encontrarse resolviendo el sistema de ecuaciones que nos proporcionan las condiciones de KKT. Hay que notar que en este caso la función Lagrangiana es

$$L(x, y, z, \mu_1, \mu_2) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + \mu_1(x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \mu_2(1 - z)$$

donde la segunda restricción se ha puesto en la forma usual  $g(x) \leq 0$

$$z \geq 1 \iff (1 - z) \leq 0$$

Planteamos las ecuaciones de KKT:

$$\begin{aligned} 2x + 1 + 2\mu_1 x &= 0 \\ 2y + 1 + 2\mu_1 y &= 0 \\ 2z + 2\mu_1 z - \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 4) &= 0 \\ \mu_2 (1 - z) &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos obtenidos en este sistema deben además ser puntos factibles, es decir, deben cumplir las desigualdades

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq 4 \\ z &\geq 1 \end{aligned}$$

La forma usual de resolver estos sistemas es utilizar las 2 últimas ecuaciones, también llamadas, ecuaciones de holgura complementaria. Como es un producto de dos factores que debe dar cero, alguno de ellos debe ser cero y tendremos 2 opciones para cada ecuaciones, lo que proporciona un total de 4 casos que describimos a continuación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mu_2 = 0 & \text{CASO I} \\ z = 1 & \text{CASO II} \\ \mu_2 = 0 & \text{CASO III} \\ z = 1 & \text{CASO IV} \end{array} \right.$$

(a) A continuación se resuelve cada uno de los sistemas que proporcionan los casos anteriores:

i. CASO I:  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ 2y + 1 &= 0 \\ 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

con

$$\mu = (0, 0)$$

ii. CASO II:  $\mu_1 = 0, z = 1$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ 2y + 1 &= 0 \\ 2 - \mu_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es

$$P_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

con

$$\mu = (0, 2)$$

iii. CASO III:  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \mu_2 = 0$

$$\begin{aligned} 2x + 1 + 2\mu_1 x &= 0 \\ 2y + 1 + 2\mu_1 y &= 0 \\ 2z + 2\mu_1 z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución se obtiene fácilmente si restamos las dos primeras ecuaciones para concluir que  $x = y$ :

$$2(x - y) + 2\mu_1(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(1 + \mu_1) = 0$$

y observamos que si  $1 + \mu_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = -1$  que al sustituir en la primera de las ecuaciones obtenemos una contradicción, de ahí que deba ocurrir  $x = y$ .

De la tercera ecuación obtenemos

$$2z + 2\mu_1 z = 0 \Leftrightarrow 2z(1 + \mu_1) = 0$$

y como ya se ha visto  $\mu_1 \neq 1$ , por tanto

$$z = 0$$

Los resultados obtenidos se utilizan en la cuarta ecuación para determinar

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Los puntos obtenidos

$$P_3 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

$$P_4 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$$

son infactibles puesto que

$$z = 0 \not\geq 1$$

y no se cumple la segunda restricción.

iv. CASO IV:  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ ,  $z = 1$

$$\begin{aligned} 2x + 1 + 2\mu_1 x &= 0 \\ 2y + 1 + 2\mu_1 y &= 0 \\ 2 + 2\mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 1 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Restando la primera y la segunda ecuaciones (siguiendo el razonamiento del CASO III) obtenemos:

$$x = y$$

que se lleva hasta la cuarta para obtener:

$$x^2 + y^2 + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

De la primera ecuación obtenemos el valor de  $\mu_1$

$$\mu_1 = -1 - \frac{1}{2x} = -1 - \frac{1}{\pm\sqrt{6}} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{6}}$$

y el valor de  $\mu_2$  de la tercera

$$\mu_2 = 2(1 + \mu_1) = 2\left(1 + \left(-1 \mp \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = 2\left(\mp \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \mp \frac{2}{\sqrt{6}} = \mp \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Este caso ha proporcionado 2 nuevos puntos

$$P_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) \quad \mu = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$P_6 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) \quad \mu = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Teniendo en cuenta las propiedades del apartado anterior, los puntos encontrados y el signo de sus multiplicadores correspondientes, tendremos el siguiente cuadro:

Punto	Multiplicadores	Valor de $f(x)$	Factibilidad	Extremo
$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$	-	-	NO	-
$P_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$	$\mu = (0, 2) \geq 0$	$\frac{1}{2}$	SI	Mínimo
$P_3 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$	-	-	NO	-
$P_4 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$	-	-	NO	-
$P_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$	$\mu = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \leq 0$	$4 + \sqrt{6}$	SI	Máximo
$P_6 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$	$\mu_1 = -1 + \frac{1}{\sqrt{6}} < 0, \mu_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$	-	SI	Punto de silla

En la tabla anterior se comprueba que  $P_2$  es el único punto que puede ser mínimo, por tanto y como según las propiedades descritas al principio, el problema debe tener mínimo y debe además cumplir las condiciones de KKT, se llega a la conclusión de que  $P_2$  debe ser el mínimo global del problema.  
El máximo global también debe cumplir las condiciones de KKT, por tanto debe ser  $P_3$  que es el único punto que queda.

5. Discute la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes cuestiones:

- (a) (0.25 pts.) “El elemento pivote en un paso del método simplex dual solamente puede ser positivo cuando la variable de salida es no degenerada”.  
Falso, el pivote en el método SIMPLEX DUAL siempre es NEGATIVO.
- (b) (0.25 pts.) “El problema dual de un problema lineal puede ser infactible aun cuando el primal tenga soluciones alternativas”  
Si el primal tiene soluciones alternativas, entonces es que tiene al menos una solución óptima y por tanto el primal también tiene solución óptima y no puede ser infactible, la afirmación es por tanto FALSA.
- (c) (0.25 pts.) “Dado un problema de minimización de una función  $f(x)$  sujeta a 2 restricciones,  $h(x) = 0$  y  $g(x) \leq 0$ ; entonces podemos utilizar como función de penalización  $F(x, h, g) = f(x) + M * h(x)^2 - M * (1/g(x))$ , siendo  $M$  un valor creciente positivo.”  
Falso,  $h(x)^2$  es una penalización exterior y por tanto  $M$ , se debe tomar creciente; pero  $-\frac{1}{g(x)}$  es penalización interior y en este caso el parámetro que la acompaña debería tender hacia 0. Una función adecuada sería

$$F(x, h, g) = f(x) + Mh(x)^2 - \frac{1}{M} \frac{1}{g(x)}$$

cuando  $M \rightarrow \infty$ .

- (d) (0.25 pts.) “Supongamos que  $x^*$  es punto crítico de la función objetivo de un problema de optimización con 2 restricciones de igualdad. Si los dos multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones son del mismo signo, entonces puede asegurarse que  $x^*$  es un mínimo local condicionado”  
Falso, el signo de los multiplicadores no se tiene en cuenta en los problemas de Lagrange (problemas con sólo restricciones de igualdad).

6.- Una fábrica de cervezas produce tres tipos: Lager ( $L$ ), Pilsen ( $P$ ) y sin alcohol ( $S$ ). Para su obtención son necesarios, además de agua y lúpulo para los que no hay límite, malta y levadura, que limitan la capacidad de producción. La siguiente tabla nos da la cantidad diaria necesaria de cada sustancia para producir un litro de cada una de las respectivas cervezas, los kilos diarios disponibles de cada recurso y el beneficio por litro, en céntimos de euro, de cada cerveza producida. El problema del fabricante consiste en decidir cuánto debe fabricar de cada cerveza para que el beneficio diario total sea máximo

	$L$	$P$	$S$	Disponibilidad
Malta	2	1	2	3000
Levadura	1	2	2	4500
Beneficio	40	70	30	

El problema se puede plantear como

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && 40L + 70P + 30S \\ &\text{Sujeto a} && 2L + P + 2S \leq 3000 \\ &&& L + 2P + 2S \leq 4500 \\ &&& L, P, S \geq 0 \end{aligned}$$

Después de poner en forma estándar y resolver mediante el SIMPLEX, se obtiene la siguiente tabla óptima

	$L$	$P$	$S$	$x_1^h$	$x_2^h$	$b$
$L$	1	0	2/3	2/3	-1/3	500
$P$	0	1	2/3	-1/3	2/3	2000
$r$	0	0	130/3	10/3	100/3	160000

Utilizando análisis post-óptimo responde a cada uno de los siguientes apartados (independientes entre sí). NO SE ADMITIRÁ aquella cuestión que no utilice los métodos de análisis post-óptimo.

- (0.4 pts.) Indica el rango en el beneficio de las cervezas Lager ( $L$ ) para que la base óptima no cambie.
- (0.4 pts.) Indica el rango en la disponibilidad de Malta para que la base óptima no cambie.

3. (0.6 ptos.) Supongamos que la empresa está pensando en producir una nueva cerveza tipo Ale (A), que necesita 1 kg de cada materia prima y tiene un beneficio por litro de 40 céntimos de euro. ¿Cuál es ahora la producción y el beneficio óptimos?
4. (0.7 ptos.) Debido a cambios climáticos provocados por el efecto invernadero, se ha visto afectada la producción de lúpulo y sólo es posible disponer de 5000 kg de lúpulo al día. Las necesidades son 3kg, 2kg y 1kg para las cervezas L, P, y S, respectivamente: ¿sería conveniente seguir con la misma producción?. En caso contrario ¿cuál sería la nueva producción óptima?.

**Solución:** La base óptima actual viene dada por los vectores  $\{\mathbf{A}_L, \mathbf{A}_P\}$  asociados a las variables  $\{L, P\}$  por tanto los coeficientes de beneficio asociados a la base óptima son (vamos a emplear la forma estándar)

$$\mathbf{c}_B = (-c_L, -c_P) = (-40, -70)$$

Mientras que la expresión de la inversa de la base óptima la encontramos en las columnas de las variables de holgura:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = (500, 2000, 0)$$

1. Como la variable  $L$  es básica, un cambio en su coeficiente de beneficio  $c_L$  ( $-c_L$  en minimización) afectará al coste relativo de todas las variables no básicas:  $r_S$ ,  $r_1^h$  y  $r_2^h$ . Para que no haya cambios en la base óptima los nuevos coeficiente de coste relativo deben ser todos positivos. Si utilizamos ahora la fórmula general del cálculo de los coeficientes de coste relativo

$$r_j = c_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j$$

obtendremos el valor de los mismos en términos de la base actual. Notar que la expresión  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j$  no es necesario calcularla, puesto que al ser un problema con variables de holgura este vector se puede obtener en la tabla óptima final, en su variable correspondiente. Utilizando, como se ha observado, el criterio de minimización obtenemos:

$$r_s = -30 - (-c_L, -70) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = -30 + \frac{2c_L}{3} + \frac{140}{3} = \frac{2c_L}{3} + \frac{50}{3} > 0$$

$$r_1^h = 0 - (-c_L, -70) \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \frac{2c_L}{3} - \frac{70}{3} > 0$$

$$r_2^h = 0 - (-c_L, -70) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = -\frac{c_L}{3} + \frac{140}{3} > 0$$

o equivalentemente

$$\frac{2c_L}{3} + \frac{50}{3} \geq 0 \Leftrightarrow c_L > -25$$

$$\frac{2c_L}{3} - \frac{70}{3} > 0 \Leftrightarrow c_L > \frac{70}{2}$$

$$-\frac{c_L}{3} + \frac{140}{3} > 0 \Leftrightarrow c_L < 140$$

Luego el rango buscado es

$$35 < c_L < 140$$

2. En este caso es una variación del término independiente, por tanto para que la base no cambie la nueva solución debe ser factible

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 4500 \end{pmatrix} \geq 0$$

de donde

$$2\frac{b_1}{3} - \frac{4500}{3} \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \geq 2250$$

$$-\frac{b_1}{3} + \frac{9000}{3} \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \leq 9000$$

y el rango buscado es

$$2250 \leq b_1 \leq 9000$$

3. Se trata de la inclusión de una nueva variable (cantidad de cerveza ALE,  $A$ ), luego la solución pasa por calcular el coeficiente de coste relativo para esta variable.

$$r_A = -40 - (-40, -70) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 40 - (-40, -70) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{10}{3} < 0$$

luego la producción de cerveza ALE modifica la base óptima y habrá que buscar la nueva solución utilizando el método simplex. La tabla actual será ahora

	$L$	$P$	$S$	$x_1^h$	$x_2^h$	$A$	$\mathbf{b}$	
$L$	1	0	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	$1/3$	500	$\Leftarrow$ Salida
$P$	0	1	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	$1/3$	2000	
	0	0	$130/3$	$10/3$	$100/3$	$-10/3$	160000	

↑  
Entrada

Utilizando los criterios de salida y entrada del método simplex obtenemos el pivote correspondiente y haciendo el cambio correspondiente (pivotando sobre este elemento) obtenemos

	$L$	$P$	$S$	$x_1^h$	$x_2^h$	$A$	$\mathbf{b}$
$A$	3	0	2	2	-1	1	1500
$P$	-1	1	0	-1	1	0	1500
	10	0	50	10	30	0	165000

que es la tabla óptima. La nueva solución es

$$\mathbf{x}^* = (0, 1500, 0, 1500) \quad z^* = 165000$$

para el problema de maximización original.

4. El problema consiste en añadir una nueva restricción al problema.

$$3L + 2P + S \leq 5000$$

Incorporamos esta nueva restricción a la tabla óptima actual incluyendo también su correspondiente variable de holgura para obtener:

	$L$	$P$	$S$	$x_1^h$	$x_2^h$	$x_3^h$	$\mathbf{b}$
$L$	1	0	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	0	500
$P$	0	1	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	0	2000
$x_3^h$	3	2	1	0	0	1	5000
	0	0	$130/3$	$10/3$	$100/3$	0	160000

Actualizamos la tabla haciendo cero los elementos de la nueva fila correspondientes a las variables básicas actuales para obtener:

	$L$	$P$	$S$	$x_1^h$	$x_2^h$	$x_3^h$	$\mathbf{b}$	
$L$	1	0	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	0	500	
$P$	0	1	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	0	2000	
$x_3^h$	0	0	$-7/3$	$-4/3$	$-1/3$	1	-500	$\Leftarrow$ Salida
	0	0	$130/3$	$10/3$	$100/3$	0	160000	

↑  
Entrada

donde como vemos hace falta utilizar el simplex dual, ya que la solución anterior no cumplía con la nueva restricción. Pivotamos sobre el elemento correspondiente para obtener:

	$L$	$P$	$S$	$x_1^h$	$x_2^h$	$x_3^h$	$\mathbf{b}$
$L$	1	0	$-1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	250
$P$	0	1	$5/4$	0	$3/4$	$-1/4$	2125
$x_1^h$	0	0	$7/4$	1	$1/4$	$-3/4$	375
	0	0	$75/2$	1	$65/2$	$5/2$	158750

y la nueva solución es

$$\mathbf{x}^* = (250, 2125, 0) \quad z^* = 158750$$

de nuevo para el problema de maximización.

7. (1.5 pts.) Un fabricante de láminas metálicas recibe un pedido para producir 2000 láminas de tamaño  $(2 \times 4) \text{ cm}^2$  y 1000 láminas de tamaño  $(4 \times 7) \text{ cm}^2$ . Se dispone de dos rollos de láminas de tamaños estándar cuyas medidas son  $(10 \times 3000) \text{ cm}^2$  y  $(11 \times 2000) \text{ cm}^2$ . El personal del departamento de ingeniería decide que los tres patrones de corte que aparecen en la figura 1 son adecuados para satisfacer el pedido. Formula el problema de satisfacer el pedido y minimizar el desperdicio TOTAL como un problema de programación lineal.

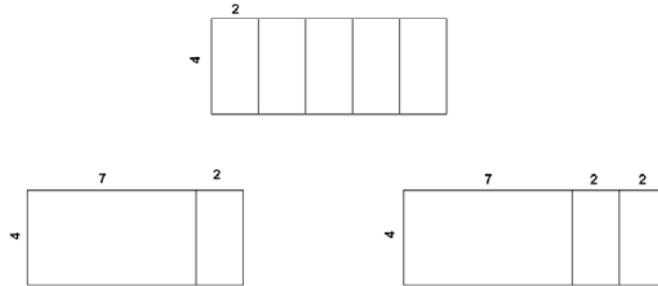


Figura 1: Patrones de corte.

**Solución:** Como hay tres patrones de corte y dos rollos, podemos considerar el problema como un problema de transporte, con la salvedad de que algunos patrones no pueden aplicarse a alguno de los rollos. Definimos las variables

$$T_{ij}$$

como el número de cortes (patrones) de tipo  $i$ , donde  $i = 1, 2, 3$ , aplicados al rollo  $j$ , donde  $j = 1, 2$ .

Aunque no es imprescindible, podemos realizar algunas consideraciones sobre los patrones de corte. Por una parte tenemos

$$T_{31} = 0$$

puesto que el ancho del patrón 3 es mayor que el ancho del rollo 1.

También tenemos

$$T_{22} = 0$$

puesto que podríamos obtener otra pieza más y este patrón es equivalente al  $T_{32}$ .

Con estos cambios nos quedan cuatro variables:  $T_{11}$ ,  $T_{21}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{32}$ .

El objetivo del problema es encontrar cuántos de estos cortes hay que dar para minimizar la pérdida de material a la vez que se satisface la demanda.

Consideraremos que el rollo no cortado con patrones no es desperdicio, es decir, el sobrante que queda después de aplicar los cortes puede utilizarse para otros pedidos. La tabla siguiente da el desperdicio al aplicar cada corte, así como el número de piezas de cada tipo

	$2 \times 4$	$4 \times 7$	Desperdicio ( $1 \times 4$ )
$T_{11}$	5	0	0
$T_{21}$	5	0	1
$T_{12}$	1	1	1
$T_{32}$	2	1	0

Las restricciones son:

1. *Demanda:* Número de piezas demandadas:

$$5T_{11} + 5T_{21} + T_{12} + 2T_{32} \geq 2000 \quad (\text{Número de piezas de } 2 \times 4)$$

$$0T_{11} + 0T_{21} + T_{12} + T_{32} \geq 1000 \quad (\text{Número de piezas de } 4 \times 7)$$

2. *Longitud de los rollos:* La aplicación sucesiva de patrones no puede exceder la longitud de los rollos:

$$4T_{11} + 4T_{21} \leq 3000 \quad (\text{Rollo 1})$$

$$4T_{12} + 4T_{32} \leq 2000 \quad (\text{Rollo 2})$$

3. *No negatividad:* El número de cortes de cada patrón debe ser no negativo:

$$T_{11}, T_{21}, T_{12}, T_{32} \geq 0$$

Por último el objetivo es minimizar el desperdicio:

Minimizar  $T_{21} + T_{12}$

**FIN**

**OBSERVACIONES GENERALES:  
LOS ERRORES GRAVES INVALIDAN CUALQUIER RESULTADO POSTERIOR  
POR FAVOR EMPIEZA CADA EJERCICIO EN UNA CARA NUEVA Y DE FORMA CORRELATIVA**

Silvestre Paredes