



1.- ALGORITMOS Y MÉTODOS NUMÉRICOS

1. La función es ahora

$$hp = \frac{0.352}{D^5} + \frac{5.8893 \times 10^{-3}}{D^{4.68}}$$

$$\begin{aligned} f(D) &= 552.0 + 245D^{1.5} + 325 (hp)^{1/2} + 61.6 (hp)^{0.925} = \\ &= 552.0 + 245D^{1.5} + 325 \left(\frac{0.352}{D^5} + \frac{5.8893 \times 10^{-3}}{D^{4.68}} \right)^{1/2} + 61.6 \left(\frac{0.352}{D^5} + \frac{5.8893 \times 10^{-3}}{D^{4.68}} \right)^{0.925} \end{aligned}$$

(a) 1ª Iteración: El primer intervalo es $[a_1, b_1] = [0.25, 6]$

$$\lambda_1 = a_1 + (1 - \tau)(b_1 - a_1) = 0.25 + (1 - 0.618) * (6 - 0.25) = 2.4465$$

$$\mu_1 = a_1 + \tau(b_1 - a_1) = 0.25(1 - 0.618) * (6 - 0.25) = 3.8035$$

$$f(\lambda_1) = 1510.7338 < f(\mu_1) = 2376.3323$$

Por tanto el nuevo intervalo es $[a_2, b_2] = [a_1, \mu_1] = [0.25, 3.8035]$

(b) 2ª Iteración:

$$\lambda_2 = a_2 + (1 - \tau)(b_2 - a_2) = 0.25 + (1 - 0.618) * (3.8035 - 0.25) = 1.60743700000000$$

$$\mu_2 = \lambda_1 = 2.4465$$

$$f(\lambda_2) = 1113.3943 < f(\mu_2) = 1510.7338$$

Por tanto el nuevo intervalo será $[a_3, b_3] = [a_1, \mu_2] = [0.25, 2.4465]$

(c) En cada iteración el intervalo se reduce una cantidad τ , es decir, si la longitud del intervalo inicial es 1, después de la primera iteración se reduce a $\tau = 0.618$. Por tanto después de n iteraciones el intervalo resultante $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ tendrá longitud τ^n . Si partimos de un intervalo inicial $[a, b]$, la longitud del intervalo resultante después de n iteraciones será $\tau^n (b - a)$, por tanto, para un error de 0.001 se debe cumplir

$$\tau^n (b - a) < 0.001 \Leftrightarrow \tau^n < \frac{0.001}{(b - a)} \Leftrightarrow n \ln \tau < \ln \frac{0.001}{(b - a)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{0.001}{(b - a)}}{\ln \tau}$$

Notar el cambio de signo en la desigualdad, ya que $\ln \tau < 0$. Para este problema $b = 6$, $a = 0.25$, por tanto

$$n > \frac{\ln \frac{0.001}{(6 - 0.25)}}{\ln 0.618} = 17.988$$

Y tendremos que dar $n = 18$ iteraciones para conseguir ese error.

(d) La pregunta del método de bisección ha sido anulada. Puesto que no era materia de examen. El método pedido tendría que haber sido el de bipartición.

2. Por ser un problema con restricciones de igualdad, planteamos la función de penalización parabólica

$$\text{Minimizar } F(x, R) = x^2 + y^2 + z^2 + R(ax + by + cz - d)^2$$

Y resolvemos el problema sin restricciones, planteando las condiciones necesarias de primer orden para este tipo de problemas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 2Ra(ax + by + cz - d) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 2Rb(ax + by + cz - d) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + 2Rc(ax + by + cz - d) = 0 \end{aligned}$$

Despejando el término $2x + 2Ra(ax + by + cz - d)$ en cada una de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{-x}{Ra} = \frac{-y}{Rb} = \frac{-z}{Rc} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Y podemos despejar y y z en función de x

$$\begin{aligned} y &= \frac{bx}{a} \\ z &= \frac{cx}{a} \end{aligned}$$

Substituyendo, por ejemplo, en la primera de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 2Ra(ax + by + cz - d) &= 0 \Leftrightarrow x + Ra\left(ax + b\frac{bx}{a} + c\frac{cx}{a} - d\right) = 0 \\ x + R(a^2x + b^2x + c^2x - ad) &= 0 \Leftrightarrow x + R(a^2 + b^2 + c^2)x - Rad = 0 \\ x(1 + R(a^2 + b^2 + c^2)) &= Rad \Leftrightarrow x = \frac{Rad}{1 + R(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} y &= \frac{Rbd}{1 + R(a^2 + b^2 + c^2)} \\ z &= \frac{Rcd}{1 + R(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

Si hacemos ahora $R \rightarrow \infty$, obtenemos

$$x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}$$

la solución del problema inicial.

2.- PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Llamemos

- x_1 Barriles de petroleo del tipo 1 utilizado
- x_2 Barriles de petroleo del tipo 2 utilizado
- x_3 Barriles de petroleo del tipo 3 utilizado
- x_4^I Barriles de petroleo del tipo 4 utilizado en el proceso I
- x_4^{II} Barriles de petroleo del tipo 4 utilizado en el proceso II

Las restricciones utilizando estas variables de decisión son:

(a) De Máxima demanda

$$\begin{array}{rcccccl} 0.6x_1 & +0.5x_2 & +0.3x_3 & +0.4x_4^I & +0.4x_4^{II} & \leq 170000 \\ 0.2x_1 & +0.2x_2 & +0.3x_3 & +0.3x_4^I & +0.1x_4^{II} & \leq 85000 \\ 0.1x_1 & +0.2x_2 & +0.3x_3 & +0.2x_4^I & +0.2x_4^{II} & \leq 85000 \\ & & & & 0.2x_4^{II} & \leq 20000 \end{array}$$

(b) De Existencias de crudo

$$\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 100000 \\ 0 \leq x_2 \leq 100000 \\ 0 \leq x_3 \leq 100000 \\ 0 \leq x_4^I + x_4^{II} \leq 20000 \\ 0 \leq x_4^I, x_4^{II} \end{array}$$

La función objetivo estará compuesta por el beneficio de cada producto, menos el coste del crudo y de las operaciones:

(a) Beneficio productos

$$\begin{array}{l} 450 * (0.6x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4^I + 0.4x_4^{II}) \\ 300 * (0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.3x_4^I + 0.1x_4^{II}) \\ 150 * (0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4^I + 0.2x_4^{II}) \\ 600 * (0.2x_4^{II}) \end{array}$$

(b) Coste operaciones + coste petroleo

$$(150 + 50)x_1 + (150 + 85)x_2 + (150 + 75)x_3 + (250 + 30)x_4^I + (250 + 25)x_4^{II}$$

2. Los tres últimos apartados del problema necesitan el conocimiento de la matriz básica; matriz que viene dada por las variables básicas del problema. La matriz está formada por las columnas (A_2, A_3, A_6^h) , por lo que la matriz B es

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa, al ser un problema con variables de holgura, la podemos encontrar en la tabla óptima

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(a) La función utilizada por MATLAB es lp, y la forma de introducir los datos es

$$\begin{array}{l} f = [4, 2, 5]; \\ A = [1, 2, 1; 3, 0, 2; 1, 4, 0]; \\ b = [430, 460, 450]; \\ vci = [0, 0, 0] \end{array}$$

y se llama a la función como

$$\text{lp}(-f, A, b, vci)$$

Donde se le ha cambiado el signo a la función objetivo, puesto que la función lp siempre toma el objetivo de minimización.

(b) La solución óptima del problema es

$$x^* = (0, 100, 230, 0, 0, 50)$$

El problema dual tendrá 3 variables y tres restricciones. Puesto que $x_2^* \neq 0$ y $x_3^* \neq 0$, las restricciones 2 y 3 del problema dual en la solución óptima serán de igualdad.

$$\begin{aligned} 2\lambda_1^* + 4\lambda_3^* &= 2 \\ \lambda_1^* + 2\lambda_2^* &= 5 \end{aligned} \quad (1)$$

Además substituyendo la solución óptima en las restricciones

$$\begin{aligned} 0 + 2 * 100 + 230 &= 430 \equiv 430 \\ 3 * 0 + 2 * 230 &= 460 \equiv 460 \\ 0 + 4 * 100 &= 400 < 450 \end{aligned}$$

Por tanto como la tercera restricción tiene holgura, la tercera variable del dual $\lambda_3^* = 0$. Substituyendo en las ecuaciones 1

$$\begin{aligned} 2\lambda_1^* &= 2 \Leftrightarrow \lambda_1^* = 1 \\ \lambda_1^* + 2\lambda_2^* &= 5 \Leftrightarrow \lambda_2^* = 2 \end{aligned}$$

Por tanto la solución óptima del dual es

$$\lambda^* = (1, 2, 0)$$

(c) Se trata de un cambio en el coeficiente de coste de una variable básica, por tanto, se van a modificar todos los coeficientes de coste relativo de las variables no básicas, utilizamos la ecuación: $r_j = c_j - c_B B^{-1} A_j$. Teniendo en cuenta que el problema es de maximización, y que el problema se ha resuelto en la forma de minimización, tendremos que cambiar el signo a la función objetivo. En este caso, el cambio implica

$$c_B = (-2, -5, 0) \leftrightarrow c'_B = (-2, -4, 0)$$

Los coeficientes de coste relativo serán por tanto

$$\begin{aligned} r'_1 &= c_1 - c'_B B^{-1} A_1 = -4 - (-2, -4, 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -4 - \left(\frac{1}{2} - 6\right) = \frac{3}{2} > 0 \\ r'_4 &= c_4^h - c'_B B^{-1} A_4^h = 0 - (-2, -4, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - (-1) = 1 > 0 \\ r'_5 &= c_5^h - c'_B B^{-1} A_5^h = 0 - (-2, -4, 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{3}{2} > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto no hay ningún cambio.

(d) Se trata de encontrar el precio c'_1 que tiene que tener x_1 para que entre en la base, es decir, se trata

$$\text{de encontrar el } c'_1 \text{ que hace a } r'_1 \leq 0 \quad r'_1 = c'_1 - c'_B B^{-1} A_1 = c'_1 - (-2, -4, 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = c'_1 - \left(\frac{1}{2} - 6\right) =$$

$$c'_1 + \frac{11}{2}$$

$$r'_1 \leq 0 \Leftrightarrow c'_1 + \frac{11}{2} \leq 0 \Leftrightarrow c'_1 \leq -\frac{11}{2}$$

Por tanto en el problema de maximización

$$c'_1 \geq \frac{11}{2}$$

- (e) Se trata en este caso de un cambio en el término independiente de la primera restricción, por lo que tendremos que ver si la solución básica actual sigue siendo factible con ese cambio.

$$x'_B = B^{-1}b' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 460 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 230 \\ -90 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución básica ha dejado de ser factible y hay que modificar la solución. La tabla queda como

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	135
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_6^h	2	0	0	-2	1	1	-90
	3	0	0	1	2	0	-1430

Y habrá que aplicar el método simplex dual, utilizando como pivote el único posible, ya que es el único negativo de la fila con coeficiente negativo.

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	$1/4$	1	0	0	0	$1/4$	$225/2$
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_4^h	-1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	45
	4	0	0	0	$5/2$	$1/2$	-1375

3. tus conocimientos de programación lineal y construyes el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{Sujeto a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ & 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 450 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(llamando con una audacia sin par, x_j a la producción del elemento j), a continuación y satisfecho de tu hazaña recuerdas la existencia de un programa que hace tiempo se utilizaba para la solución de problemas de tal envergadura. Temeroso y con sigilo enciendes el viejo ordenador, que después de algún que otro amago de cortocircuitarse consigue funcionar sin quemarse mucho. Introduces los datos en el famoso programa y milagro, obtienes la solución del problema. Construyes (a duras penas, todo hay que decirlo) la tabla óptima completa del problema, que copias en un folio con manchas de aceite y raudamente te diriges al director para presentarle orgullosamente el trabajo. En ese momento se produce un fogonazo seguido de una explosión, no miras hacia atrás porque sabes lo que ha ocurrido, ¡¡¡menos mal que tienes la solución!!!. A continuación se reproduce dicha tabla (sin las manchas de aceite)

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_6^h	b
x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
x_5^h	2	0	0	-2	1	1	50
	3	0	0	1	2	0	-1350

El director observa con atención el trabajo y te plantea las siguientes preguntas

- (a) ¿Qué función utiliza el famoso programa (MATLAB se llamaba) para resolver este tipo de problemas? ¿Cómo se introducen los datos?. (0.5 puntos)

- (b) Dar la solución del problema lineal dual utilizando holgura complementaria? (0.75 puntos).
- (c) ¿Qué ocurre si el precio de las lepardias (x_3) disminuye de 5 hasta 4. (0.5 puntos)
- (d) ¿A qué precio hay que vender las lordas (x_1) para que sea rentable su producción? (0.5 puntos)
- (e) Si se cambia la máquina 1 (1ª restricción) por otra nueva aumentando su capacidad de 430 hasta 500. ¿Se tendría que seguir con la misma producción?. En caso contrario cual será la nueva producción. (1.0 puntos)

Obviamente con el ordenador echando humo tendrás que recurrir a otros métodos para dar la solución.

3.- PROGRAMACIÓN NO LINEAL

1. Resolver el siguiente problema utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange (2.5 puntos)

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ \text{Sujeto a} & 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \end{array}$$

RESPONDER RAZONADAMENTE A TODAS LAS PREGUNTAS

Silvestre Paredes Hernández