

## 3.8 Programación Entera

### 3.8.1 Introducción

En la mayoría de los casos de programación lineal las variables del problema pueden tomar cualquier valor entre los límites impuestos, pero algunas veces es necesario que alguna de esas variables sólo pueda tomar valores enteros. Este tipo de problemas son llamados problemas de programación lineal entera o simplemente *problemas de programación entera*.

El problema de *programación entera general* se define como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar o Maximizar} & z(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeto a} & \\ & g_j(\mathbf{x}) (\leq, \geq, =) b_j \quad j = 1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Donde  $z(\mathbf{x}), g_j : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función que puede ser lineal o no lineal, aunque en esta sección trataremos solamente el estudio de problemas enteros lineales donde todas las funciones implicadas son de este tipo.

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 3.1 (Problema del excursionista)** *Supongamos que un excursionista quiere llevarse  $n$  objetos de peso  $p_j$  y valor  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Si el excursionista solamente puede llevar un peso  $P$  en la mochila, el problema consiste en maximizar el valor total de los objetos que lleva en la mochila sin sobrepasar el peso máximo.*

**Solución:** Para cada objeto hay que decidir si se incluye o no en la mochila, por tanto definimos como variable de decisión

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{Si el objeto } j \text{ está en la mochila} \\ 0 & \text{Si el objeto } j \text{ no está en la mochila} \end{cases}$$

el problema anterior se puede plantear como

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \sum_{j=1}^n v_j x_j \\ \text{Sujeto a} & \\ & \sum_{j=1}^n p_j x_j \leq P \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{array}$$

Es decir es un problema lineal donde las variables de decisión solamente pueden tomar un conjunto finito de valores.

**Ejemplo 3.2** *Consideremos el problema de producir  $n$  artículos, de modo que la producción del producto  $j$  requiere un coste fijo de producción  $k_j$ ; independiente de la cantidad de producción, y un coste  $c_j$  por cada unidad producida. Se asume que cada unidad de producto  $j$  requiere  $a_{ij}$  unidades del recurso  $i$ , y que hay  $m$  recursos disponibles. La demanda para el producto  $j$  es  $d_j$  y el precio de venta es  $p_j$  por unidad. Si además existen  $b_i$  unidades del recurso  $i$ , el problema consiste en determinar la producción de cada producto  $j$  que maximiza el beneficio neto.*

**Solución:** El coste total de producción (coste fijo+coste variable) es una función no lineal de las cantidades producidas. Pero podemos utilizar variables enteras binarias y volver a formular el problema como un problema de programación entera.

Se define  $\delta_j$  como la variable que indica la decisión de producir o no el producto  $j$ , es decir

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se produce el producto } j \\ 0 & \text{Si no se produce el producto } j \end{cases}$$

es por tanto una variable entera. Si  $x_j \geq 0$  es la cantidad de producto  $j$  producido. Entonces el coste total de producción de  $x_j$  unidades del producto  $j$  es  $k_j\delta_j + c_jx_j$ , donde  $\delta_j = 1$  si  $x_j > 0$ , y 0 si  $x_j = 0$ . Por tanto la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^n p_j x_j - \sum_{j=1}^n (k_j \delta_j + c_j x_j)$$

Las restricciones para el  $i$ -ésimo recurso están dadas mediante las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

Las restricciones de demanda para el  $j$ -ésimo producto están dadas para  $j = 1, \dots, n$  como

$$x_j \leq d_j \delta_j$$

$$x_j \geq 0$$

$$\delta_j \in \{0, 1\}$$

### 3.8.2 Clasificación

Los problemas enteros se pueden clasificar según diferentes criterios; aunque los más usuales son o bien atendiendo al tipo de variable que interviene en el problema, o bien por el tipo de problemas que trata de resolver.

Según el tipo de variable que interviene en el problema, los problemas de programación entera se pueden clasificar en:

#### 1. **Enteros Puros**

Todas las variables del problema son enteras. Dentro de este tipo de problemas también se puede distinguir los problemas *totalmente enteros*, en los que tanto las variables como los coeficientes que intervienen en el problema son enteros

#### 2. **Mixtos**

Problemas con variables enteras y continuas.

#### 3. **Binarios**

Cuando existe al menos una variable binaria, es decir, una variable que solamente puede tomar los valores 0 y 1. Distinguimos dos casos

##### (a) Puros

Todas las variables son binarias.

##### (b) Mixtos

Existen variables binarias y variables que no lo son.

Según el tipo de problema los problemas enteros se clasifican en:

#### 1. **Directo**

Si el problema lineal implica variables enteras.

#### 2. **Codificado**

Si se trata de un problema que implica además de aspectos cuantitativos, alguna consideración de tipo cualitativo y en este caso hay que tratar estos aspectos mediante variables enteras o binarias.

#### 3. **Transformados**

Cuando el problema inicial no incluye variables enteras, pero para resolverse analíticamente requiere el uso de variables artificiales enteras.

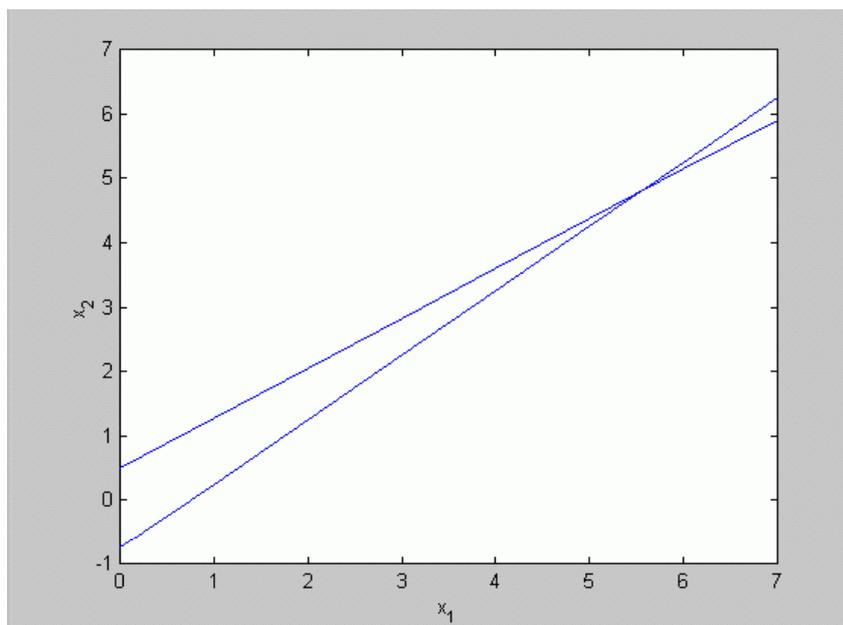


Figura 3.1:

### 3.8.3 Métodos de resolución

Existen diversos métodos de búsqueda de las soluciones de un problema de programación entera, presentaremos aquí algunos de ellos.

#### Enumeración exhaustiva o explícita

Como el conjunto de las soluciones enteras en un problema entero suele ser finito, este método se basa en calcular el valor de la función objetivo en ese conjunto finito de valores y elegir el valor más pequeño (más grande en el caso de maximización) como solución óptima del problema entero.

Este método puede emplearse cuando el conjunto factible es acotado, y será efectivo cuando el número de candidatos es pequeño, el método no se puede aplicar cuando el conjunto factible es no acotado y pierde efectividad cuando el número de soluciones factibles crece.

Para llevar a cabo este método se comienza por determinar los recorridos  $X_i$  (en valores enteros), de cada variable  $x_i$ , después el conjunto producto cartesiano de esos conjuntos  $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ , y a partir de él, el conjunto factible obtenido a partir de la verificación de las restricciones en cada punto de  $X$ . Finalmente, se obtiene la solución óptima, determinando el valor de la función objetivo en cada punto de ese conjunto factible.

**Ejemplo 3.3** Por ejemplo si utilizamos el método de enumeración, para el problema

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && -2x_1 - x_2 \\ & \text{Sujeto a} && -17x_1 + 22x_2 \leq 11 \\ & && 4x_1 - 4x_2 \leq 3 \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

**Solución:** Los rangos para las variables  $x_1$  y  $x_2$  son según la gráfica 3.1

$$\begin{aligned} x_1 & \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ x_2 & \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Por tanto las posibles soluciones enteras son

$$x_1 \times x_2 = \{(0, 0); (0, 1); \dots; (5, 3); (5, 4)\}$$

Del conjunto anterior, solamente son factibles los puntos

$$F = \{(0, 0); (1, 1); (2, 2)\}$$

con valores para la función objetivo

$$Z = \{0; -3; -6\}$$

y se alcanzará el mínimo para el PE en el punto (2, 2).

El problema de este método es que pueden existir un número de soluciones enteras muy elevado, por ejemplo, en un problema con 15 variables donde cada una puede tomar 10 posibles valores, tendríamos que analizar más de 100 billones de puntos. Por otra parte, hay problemas en los que aparen restricciones que no definen regiones acotadas, lo que podría llevar a una región factible no acotada, y por tanto el rango de alguna de las variables puede ser infinito y el problema no puede contemplarse desde este punto de vista.

### Problema lineal asociado

Sin en un problema de programación entera no se tienen en cuenta ninguna de las restricciones de integridad sobre las variables que pueda existir, se obtiene un problema lineal denominado *problema lineal asociado* o *problema relajado*. Este problema se puede resolver mediante el método Simplex, y podemos tomar como soluciones del problema entero las aproximaciones por exceso o por defecto de las variables que deban cumplir la condición de integridad.

El método se utiliza normalmente cuando los valores que toman las variables del problema son grandes y el error de aproximación es despreciable. Sin embargo, para problemas con variables que toman valores moderados o pequeños, se puede llegar a una solución muy distinta de la verdadera solución óptima del programa entero. Por ejemplo puede ocurrir que la aproximación de la solución sea muy diferente de la solución real del problema entero; como por ejemplo en el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

donde al resolver el problema lineal relajado obtenemos como solución óptima

$$\mathbf{x}^* = (0.4, 1.2) \Rightarrow [\mathbf{x}^*] = (0, 1)$$

con  $z([\mathbf{x}^*]) = 3$  para la función objetivo, pero la solución óptima para el problema entero es  $\mathbf{x}_{PE}^* = (1, 0)$  con  $z_{PE}^*(1, 0) = 4$ .

También puede ocurrir que las aproximaciones (por exceso o defecto) den lugar a soluciones no factibles para el problema entero, como por ejemplo en el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 8x_1 + 10x_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

Cuyo problema lineal relajado tiene como solución óptima

$$\mathbf{x}^* = (2, 8/3)$$

Si consideramos ahora las posibles aproximaciones a valores enteros obtenemos:

$$(2, 3) \Rightarrow \text{No es factible}$$

$$(2, 2) \Rightarrow \text{Factible, pero no es óptima}$$

La solución óptima del problema entero anterior se obtiene en el punto  $(0, 4)$  con  $z^*(0, 4) = 40$ .

Vemos en el siguiente ejemplo el caso extremo en que ninguna de las posibles aproximaciones a valores enteros da lugar a un punto factible.

**Ejemplo 3.4** *Aplicar el método de aproximación al problema*

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 \\ \text{Sujeto a} & \\ & -17x_1 + 22x_2 \leq 11 \\ & 4x_1 - 4x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

**Solución:** Planteamos y resolvemos el problema relajado, obteniendo como solución óptima

$$\mathbf{x}^* = (5.5, 4.75) \text{ y } z^* = z(\mathbf{x}^*) = -15.75$$

Los posibles diferentes redondeos para las variables nos da como soluciones aproximadas las siguientes

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}^1 & = (5, 4) \\ \mathbf{x}^2 & = (5, 5) \\ \mathbf{x}^3 & = (6, 4) \\ \mathbf{x}^4 & = (6, 5) \end{array}$$

pero ninguna de ellas es factible. La solución óptima del PE es  $\mathbf{x}_{PE}^* = (2, 2)$ .

Otro problema de este método es que si el número de variables es grande, entonces el número de aproximaciones también lo será. Por ejemplo, para un problema con  $n = 20$  variables, el número de posibles aproximaciones puede ser  $2^{20} = 1048576$

### Algoritmo de ramificación y acotación

El algoritmo de ramificación y acotación (*branching and bounding*) es el algoritmo más extendido para resolver problemas de programación entera, tanto pura como mixta. Este método se puede considerar como un procedimiento de enumeración eficiente para examinar todas las posibles soluciones enteras.

Como se ha discutido anteriormente una aproximación práctica para resolver problemas de programación entera, es ignorar las restricciones de integridad iniciales y resolver el problema lineal relajado que resulta. Si las soluciones del problema relajado contienen valores no enteros para alguna de las variables, entonces utilizando procedimientos de redondeo o truncado se puede intentar obtener una aproximación a la solución óptima entera del problema. Por ejemplo, si hay 2 variables enteras  $x_1$  y  $x_2$  con valores fraccionarios 3.5 y 4.4, podemos examinar 4 posibles soluciones enteras:  $(3, 4)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(3, 5)$  y  $(4, 5)$ . También hemos comprobado, como en el ejemplo anterior, que la verdadera solución óptima entera puede no ser ninguna de las anteriores, puesto que es posible que, por ejemplo,  $x_1$  tenga un valor óptimo entero más pequeño que 3 o más grande que 4. Por tanto, para obtener la verdadera solución óptima entera se tienen que considerar todos los posibles valores enteros de  $x_1$  más pequeños y más grandes que 3.5. En otras palabras, la solución óptima entera debe cumplir

$$x_1 \leq 3 \quad \text{ó} \quad x_1 \geq 4$$

Obviamente si un problema tiene un gran número de variables, necesitamos un método sistemático que examine todas las posibles combinaciones de enteros que se obtienen a partir de la solución del problema lineal relajado.

**Teorema 3.5** *Para un problema de programación entera con objetivo de minimización (maximización), se verifica que si el problema lineal relajado asociado es infactible, entonces el problema entero también es infactible. En otro caso ocurre*

$$\begin{array}{l} z_{PR}^* \leq z_{PE}^* \text{ (Minimización)} \\ z_{PR}^* \geq z_{PE}^* \text{ (Maximización)} \end{array}$$

*Si el problema relajado es no acotado, entonces el problema entero es infactible o no acotado.*

**Demostración:** La demostración es trivial puesto que el conjunto factible para el problema de programación entera, es siempre menor o igual que el conjunto factible del problema relajado ya que estamos quitando restricciones.

Desarrollaremos el método de *Ramificación y Acotación* sobre el un problema particular. Sea

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeto a} & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3.5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

El paso inicial es resolver el problema lineal asociado. Llamaremos a este problema *PL1*, cuya solución óptima es  $\mathbf{x}_{PL1}^* = (2, 1.5)$ , con valor óptimo  $z_{PL1}^* = -9$ . Por el teorema anterior el valor de la función objetivo para el problema entero tiene que ser más grande que 9. Tenemos pues, una cota inferior para el valor del máximo de  $z_{PE}^*$ .

El siguiente paso del método de ramificación y acotación es examinar los valores enteros de  $x_2$  que son más pequeños o más grandes que 1.5. Esto se consigue añadiendo una nueva restricción al problema original (*PL1*). Como podemos añadir bien  $x_2 \leq 1$  o bien  $x_2 \geq 2$ , tendremos 2 nuevos problemas lineales

	<i>PL2</i>		<i>PL3</i>
Minimizar	$-3x_1 - 2x_2$	Minimizar	$-3x_1 - 2x_2$
Sujeto a	$x_1 \leq 2$	Sujeto a	$x_1 \leq 2$
	$x_2 \leq 2$		$x_2 \leq 2$
	$x_1 + x_2 \leq 3.5$		$x_1 + x_2 \leq 3.5$
	$x_2 \leq 1$		$x_2 \geq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$

Al plantear estos problemas podemos observar lo siguiente:

1. La solución óptima del problema inicial *PL1*, es infactible para ambos problemas.
2. Cualquier solución entera del problema mixto original está contenida en alguno de los dos problemas anteriores y por tanto no se pierde ninguna solución factible del problema.

La solución óptima para *PL2* es  $\mathbf{x}_{PL2}^* = (2, 1)$  con valor óptimo  $z_{PL2}^* = -8$ . Como la solución de este problema es entera,  $z_{PL2}^* = -8$  será una cota inferior para el valor óptimo del problema entero, es decir, la solución óptima para el problema entero inicial,  $z_{PE}^*$ , tiene que cumplir la desigualdad  $z_{PE}^* \leq z_{PL2}^*$ , puesto que el problema *PL2* tiene un conjunto factible más pequeño que *PE*.

La solución óptima del problema *PL3* es  $\mathbf{x}^* = (1.5, 2)$ , con  $z_{PL3}^* = -8.5$ . Esta solución no es factible para el problema entero puesto que una de sus variables,  $x_1$ , no es entera, como exigían las condiciones del problema inicial. Por otra parte el mínimo de este problema es  $-8.5$ , menor que el límite inferior ( $z_{PL2}^* = -8$ ), por tanto será necesario examinar si existe una solución entera en la región factible del problema *PL3*, cuyo valor óptimo pueda ser mayor que 8, y se alcance en un a solución factible para el problema entero original. Con el fin de comprobar esta situación, construimos dos subproblemas a partir del problema *PL3*, añadiendo en cada caso una nueva restricción  $x_1 \leq 1$  o  $x_1 \geq 2$ . Tenemos por tanto dos nuevos problemas lineales: *PL4* y *PL5*

	<i>PL4</i>		<i>PL5</i>
Minimizar	$-3x_1 - 2x_2$	Minimizar	$-3x_1 - 2x_2$
Sujeto a	$x_1 \leq 2$	Sujeto a	$x_1 \leq 2$
	$x_2 \leq 2$		$x_2 \leq 2$
	$x_1 + x_2 \leq 3.5$		$x_1 + x_2 \leq 3.5$
	$x_2 \geq 2$		$x_2 \geq 2$
	$x_1 \leq 1$		$x_1 \geq 2$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$

La solución óptima de *PL4* es  $\mathbf{x}_{PL4}^* = (1, 2)$ , con  $z_{PL4}^* = -7$  y *PL5* es infactible. Esto indica que cualquier solución entera en la región factible de *PL3* no puede tener un valor para la función objetivo menor que  $-7$ .

Por tanto la solución entera obtenida al resolver  $PL2$ ,  $\mathbf{x}_{PL2}^* = (2, 1)$  con  $z_{PL2}^* = -8$  es la solución óptima del problema entero inicial.

El proceso descrito mediante este problema se resume en las fases del siguiente algoritmo. Donde hemos considerado que el objetivo del problema entero es de minimización:

### Inicio

Resolvemos el problema lineal relajado asociado al problema entero. Si la solución óptima es entera, esta será también la solución óptima del problema entero. Si la solución óptima no es entera, elegimos una cota inferior  $z_s$ , para el valor óptimo de la función objetivo (también podemos tomar bien  $z_s = \infty$ , bien un valor grande, en caso de resolver el problema mediante ordenador, o bien el valor de la función objetivo para algún punto factible del problema entero). Con este valor un problema cuya solución óptima,  $z_p$ , cumpla la desigualdad  $z_p \geq z_s$ , será un problema terminal, puesto que el objetivo es de minimización.

### Ramificación

Seleccionamos un subproblema y una variable no entera y que deba cumplir esta condición de su solución óptima (en el primer paso del algoritmo solamente tendremos un problema que sería el problema lineal relajado asociado al problema entero). A partir del problema elegido, construimos 2 subproblemas añadiendo para ello las restricciones que excluyen los valores fraccionarios de la componente elegida.

### Acotación

Resolver cada subproblema y obtener el valor óptimo,  $z_p$ , de la función objetivo para cada subproblema.

### Sondeo

Analizar los subconjuntos que pueden contener la solución óptima y considerar como terminales los problemas que:

1. Sean infactibles.
2.  $z_p \geq z_s$ . Su función objetivo es mayor o igual que el límite.
3.  $z_p$  se alcanza en un punto factible para PE con  $z_p < z_s$ . En este caso  $z_s = z_p$  y volvemos "sondear" de nuevo todos los subproblemas con este nuevo límite.

### Convergencia

Si todos los subconjuntos son terminales, el algoritmo termina, el valor óptimo será  $z_s$ . En otro caso hay que seguir con la fase de **Ramificación**.

En la fase de **Inicio** podemos utilizar diferentes reglas para elegir la variable no entera sobre la que el problema se ramifica. Aunque se puede realizar de forma arbitraria, a la hora de realizar los cálculos mediante el ordenador se incluye un criterio que puede ser

1. Seleccionar la variable entera que tenga un valor fraccional mayor en el problema relajado.
2. Asignando prioridades a las variables enteras de forma que ramificamos primero en la más importante. La importancia de una variable entera puede estar basada en un o varios criterios:
  - (a) La variable representa una decisión importante en el modelo
  - (b) Su coeficiente de coste o beneficio en la función objetivo es muy grande comparado con los demás
  - (c) Su valor es crítico para el modelo basado en la experiencia del usuario
3. Reglas de selección arbitrarias; por ejemplo, seleccionar la variable con menor subíndice primero.

Para elegir el subproblema a ramificar (en el primer paso no hay problema, porque solamente tenemos un problema), podemos utilizar dos reglas:

1. *Utilizando el valor óptimo de la función objetivo.* Se elige el subproblema con menor valor para la función objetivo (para el problema de minimización).

2. Regla de la cota más reciente (*last-in-first-out*). Se elige el subproblema resuelto más recientemente.

**Ejemplo 3.6** Resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ & x_j \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

mediante el algoritmo de ramificación y acotación.

**Solución:** Aplicamos el algoritmo construyendo y resolviendo en primer lugar, el problema lineal asociado:

**Inicio**

Planteamos el problema lineal relajado

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

que tiene por solución óptima

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{PR}^* &= (0, 8.2, 8.8) \\ z_{PR}^* &= z_{PL1}^* = 42.2 \end{aligned}$$

Esta solución no es factible para el problema de programación entera puesto que algunas de sus componentes no cumplen la condición de integridad (variables  $x_2$  y  $x_3$ ), y por tanto no es la solución óptima del problema entero. Elegimos una cota superior para la función objetivo, podemos tomar por ejemplo:

$$z_s = \infty$$

En el caso de resolución mediante el ordenador,  $z_s$  podríamos utilizar para  $z_s$  un valor positivo grande. También podemos elegir  $z_s$ , como el valor de la función objetivo para una solución factible entera. Al estar en un problema de minimización, cualquier valor óptimo de un subproblema que más grande que  $z_s$  no podrá ser el óptimo del problema entero original.

**Ramificación (1ª Iteración)**

En este paso hay que elegir un subproblema sobre el que ramificar, como en estamos al principio del método solamente contamos con un problema, el problema lineal relajado inicial, elegimos dicho problema.

Podemos ramificar sobre  $x_2$  y sobre  $x_3$ , ya que estas variables toman valores no enteros para la solución óptima del problema relajado ( $PL1$ ). Ramificamos arbitrariamente sobre  $x_2$ . Al añadir alguna de las restricciones

$$x_2 \leq 8 \text{ o } x_2 \geq 9$$

obtenemos 2 problemas

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL2$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ & x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL3$$

De esta forma eliminamos para la variable  $x_2$ , los valores fraccionarios que existen entre 8 y 9



**Ramificación (3ª Iteración).** Nos encontramos ahora con dos problemas sobre los que podemos ramificar. Para elegir el subproblema sobre el que realizamos la ramificación, aplicamos la regla de la mejor cota, tomamos para ramificar el subproblema  $PL4$  ( $z_{PL4} \leq z_{PL5}$ ) y ramificamos sobre la variable  $x_3$  (no hay otra elección posible puesto que las demás son enteras). Con las restricciones  $x_3 \leq 8$  y  $x_3 \geq 9$  formamos los subproblemas  $PL6$  y  $PL7$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 0 \\ x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL6$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 0 \\ x_3 \geq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL7$$

**Acotación.** Cuyas soluciones son

$$PL6 \Rightarrow \mathbf{x}_{PL6}^* = (0, 7.67, 8) \quad z_{PL6}^* = -39$$

$$PL7 \Rightarrow \text{infactible}$$

**Sondeo.** El problema  $PL7$  es infactible, y por tanto terminal.  $PL6$  no es terminal, ya que no cumple ninguna de las condiciones del paso 3.

**Convergencia.** Como quedan problemas sin ramificar ( $PL5$  y  $PL6$ ) volvemos a Ramificar.

**Ramificación (4ª Iteración)** Utilizamos de nuevo la regla de la mejor cota para elegir el problema a ramificar, en este caso

$$z_{PL5}^* = -26.4 > z_{PL6}^* = -39$$

Elegimos por tanto el problema  $PL6$  para ramificar. Ramificamos sobre la variable  $x_2$  (que es la única no entera de la solución óptima, mediante dos nuevas restricciones:  $x_2 \leq 7$  y  $x_2 \geq 8$ , obtenemos los problemas  $PL8$  y  $PL9$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 0 \\ x_3 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL8$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 0 \\ x_3 \geq 8 \\ x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL9$$

o de forma equivalente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 0 \\ x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL8$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeto a} \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_2 = 8 \\ x_1 \leq 0 \\ x_3 \geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} PL9$$

**Acotación.** Resolviendo los problemas  $PL8$  y  $PL9$  obtenemos:

$$PL8 \Rightarrow \mathbf{x}_{PL8}^* = (0, 7, 8) \quad z_{PL8}^* = -37$$

$$PL9 \Rightarrow \text{infactible}$$

**Sondeo.** Ambos problemas son terminales,  $PL9$  porque es infactible, y  $PL8$  porque alcanza su solución óptima en un punto factible para el problema entero (todas las variables son enteras) y además

$$z_{PL8}^* = -37 \leq z_s = \infty$$

Por tanto el nuevo valor de  $z_s$  pasa a valer

$$z_s = -37$$

ya que tenemos una solución entera, cuyo valor es más pequeño que la cota superior impuesta.

Como hemos cambiado la cota superior, volvemos a sondear los problemas no terminales que quedan, en este caso solamente el  $PL5$  es no terminal, pero en este caso obtenemos

$$z_{PL5}^* = -26.4 \geq z_s = -37$$

y por tanto  $PL5$  es terminal con esta nueva cota.

**Convergencia.** Finalmente como todos los problemas han sido sondeados, se obtiene la convergencia y paramos el algoritmo, siendo la solución óptima del problema entero:

$$\mathbf{x}_{PE}^* = (0, 7, 8) \text{ con } z_{PE}^* = -37$$

### Método de Gomory o planos de corte

La idea fundamental de los métodos de planos de corte consiste en ir aproximando sucesivamente la solución del problema relajado a la del entero mediante la generación sucesiva de restricciones que eliminen parte de las soluciones factibles del problema relajado hasta que la solución del problema lineal aproximado sea entera.

El algoritmo de Gomory se utiliza para resolver problemas de programación entera, donde todas las variables tienen que ser enteras, el método se puede resumir como sigue:

Se resuelve el problema lineal relajado mediante el método Simplex. Si no existe solución para el problema asociado tampoco existirá para el problema entero. Supongamos que si existe solución óptima  $\mathbf{x}^0$ . Si  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\mathbf{x}^0$  también será la solución del problema entero, y el método acaba. Supongamos por el contrario que existe una componente de  $\mathbf{x}^0$  que no es entera, en ese caso se calcula

$$f_p^0 = \min \{ f_i^0 \mid f_i^0 = x_i^0 - [x_i^0]; \quad f_i^0 > 0 \}$$

la fila  $p$  es la llamada *fila fuente* y a partir de ella se construye una nueva restricción de la forma:

$$-\sum_{j \notin B} f_{pj} x_j + x^g = -f_p^0$$

con  $f_{pj} = y_{pj} - [y_{pj}]$  y  $x^g$  variable de holgura, que se incorpora a la tabla óptima actual del simplex.

La tabla óptima junto con la restricción anterior constituyen una nueva tabla que proporciona una solución no factible pero que es factible dual, y podemos, por tanto aplicar el método simplex dual. Si existe una nueva solución  $\mathbf{x}^0$  óptima continuamos con una nueva iteración. En otro caso, no hay solución entera para el problema.

#### Algoritmo del método de Gomory

**Paso 0.** Resolvemos el problema lineal relajado mediante el método simplex. Si no existe solución, detenemos el algoritmo puesto que tampoco habrá solución para la programación entera. En otro caso, sea  $\mathbf{x}_{PR}^*$  la solución óptima con  $\mathbf{z}_{PR}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{PR}^*$  su valor óptimo. Hacer  $k = 1$ , e ir al **Paso 1**.

**Paso 1.** Si  $x_j^0 \in \mathbb{Z}$  para todo  $j$ ,  $\mathbf{x}_{PR}^*$  es la solución óptima del problema entero. En otro caso, ir al **Paso 2**.

**Paso 2.** Determinar la fila fuente

$$f_p^0 = \min \{ f_i^0 \mid f_i^0 = x_i^0 - [x_i^0]; \quad f_i^0 > 0 \}$$

**Paso 3.** A partir de la fila  $p$  se forma la restricción (*corte*):

$$-\sum_{j \notin B} f_{pj} x_j + s_p = -f_p^0$$

con  $f_{pj} = y_{pj} - [y_{pj}]$  y  $s_p$  variable de holgura, siendo  $B$  el conjunto de índices de las variables básicas. A continuación añadimos esta nueva restricción a la tabla óptima actual del simplex.

**Paso 4.** Aplicar a la tabla ampliada el método del simplex dual. Si existe una solución  $\mathbf{x}^*$  factible, hacer  $k = k + 1$ , e ir al **Paso 1**. En otro caso, no hay solución entera para el problema y parar.

**Ejemplo 3.7** Aplicar el algoritmo anterior al problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeto a} & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

**Solución:**

*Primera iteración:*

**Paso 0.** Resolvemos el problema relajado mediante el método del simplex, siendo la tabla óptima ( $x_3^h$  y  $x_4^h$  variables de holgura)

	$x_1$	$x_2$	$x_3^h$	$x_4^h$	$b$
$x_1$	1	0	1/7	-3/7	6/7
$x_2$	0	1	1/7	4/7	20/7
	0	0	3/7	5/7	46/7

con solución

$$\mathbf{x}^0 = (6/7, 20/7)$$

Hacemos  $k = 0$  y vamos al **Paso 1**.

**Paso 1.** Como  $\mathbf{x}^0 \notin \mathbb{Z}$ , vamos al **Paso 2**.

**Paso 2.** A partir de la tabla, determinamos

$$f_p^0 = \min_{i=1,2} \{ f_1^0 = 6/7 - [6/7]; \quad f_2^0 = 20/7 - [20/7] \} = \min \{ 6/7, 6/7 \} = 6/7$$

y puesto que coinciden, tomamos arbitrariamente uno de ellos, por ejemplo  $f_1^0$ , siendo por tanto  $p = 1$  la fila fuente.

**Paso 3.** Formamos el corte

$$-\frac{1}{7}x_3^h - \frac{4}{7}x_4^h + x_5^g = -\frac{6}{7}$$

con  $x_5^g$  variable de holgura. Añadimos esta restricción a la tabla óptima, obteniendo la tabla

	$x_1$	$x_2$	$x_3^h$	$x_4^h$	$x_5^g$	$b$
$x_1$	1	0	1/7	-3/7	0	6/7
$x_2$	0	1	1/7	4/7	0	20/7
$x_5^g$	0	0	-1/7	-4/7	1	-6/7
	0	0	3/7	5/7	0	46/7

**Paso 4.** Aplicamos el método simplex dual a la tabla anterior, para obtener la tabla siguiente

	$x_1$	$x_2$	$x_3^h$	$x_4^h$	$x_5^g$	$b$
$x_1$	1	0	1/4	0	-3/4	3/2
$x_2$	0	1	0	0	1	2
$x_4^h$	0	0	1/4	1	-7/4	3/2
	0	0	1/4	0	5/4	11/2

con solución

$$\mathbf{x}^1 = (3/2, 2)$$

Hacemos  $k = 1$  y volvemos al **Paso 1**.

*Segunda iteración:*

**Paso 1.** Como  $x_1^1 = 3/2 \notin \mathbb{Z}$ , vamos al **Paso 2**

**Paso 2.** La fila fuente es la primera (la única con valor fraccionario para la variable básica)

**Paso 3.** Formamos el corte

$$-\frac{1}{4}x_3^h - \frac{1}{4}x_5^g + x_6^g = -\frac{1}{2}$$

con  $x_6^g$  variable de holgura. Añadimos esta restricción a la última tabla para obtener la siguiente

	$x_1$	$x_2$	$x_3^h$	$x_4^h$	$x_5^g$	$x_6^g$	$b$
$x_1$	1	0	1/4	0	-3/4	0	3/2
$x_2$	0	1	0	0	1	0	2
$x_4^h$	0	0	1/4	1	-7/4	0	3/2
$x_6^g$	0	0	-1/4	0	-1/4	1	-1/2
	0	0	1/4	0	5/4	0	11/2

**Paso 4.** Aplicamos el método simplex dual a la tabla anterior y obtenemos

	$x_1$	$x_2$	$x_3^h$	$x_4^h$	$x_5^g$	$x_6^g$	$b$
$x_1$	1	0	0	0	-1	1	1
$x_2$	0	1	0	0	1	0	2
$x_4^h$	0	0	0	1	-2	0	1
$x_6^g$	0	0	1	0	-1	-4	2
	0	0	0	0	1	0	5

Hay solución

$$\mathbf{x}^2 = (1, 2)$$

Hacemos  $k = 2$  y vamos al **Paso 1**.

*Tercera iteración*

**Paso 1.** Como  $\mathbf{x}^2 = (1, 2) \in \mathbb{Z}$ , la solución es óptima con valor para el objetivo  $z^* = 5$

El corte que hemos considerado en el ejemplo anterior no es el único, sino que existe una familia relacionada de planos de corte, que bajo ciertas condiciones permiten construir algoritmos finitos para el problema entero general.

### 3.9 Bibliografía Básica del Tema

1. Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J. & Sherali, H. D. *Linear Programming and Networks Flows*. Ed. John Wiley & Sons, Inc (1990)
2. Gass, S. I. *Programación Lineal*. Ed. CECSA (1983)
3. Luenberger, D.E. *Programación Lineal y No Lineal*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana (1989)
4. Mocholí-Arce, M. & Sala-Garrido, R. *Decisiones de Optimización*. Editorial Tirant lo Blanch (1996)
5. Ríos-Insua, S. *Investigación Operativa*. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces S.P. (1988)