Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Problemas de Optimización Estática (Curso 2007/2008)
Hoja 2 - Optimización no lineal

1. Encuentra sobre $\mathbb{R}$, los extremos locales y globales de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = x^5 + x^4 - \frac{x^3}{3} + 2 \qquad \text{b) } g(x) = (2x+1)^2 (x-4)$$

2. Halla los extremos locales y globales de $f(x) = x^3 - 12x + 3$ en el intervalo $[-4, 4]$.

3. Se construye un barco para transportar L toneladas diarias a lo largo de una ruta de longitud D entre dos puertos. Si el coste de construcción del barco, sin los motores, varía según la capacidad de carga del bargo (l) y el coste de los motores varía como el producto de esta capacidad de carga y el cubo de la velocidad (v) que alcanza el barco, muestra que el coste total de construcción es menor cuando se gasta 2 veces más en el barco que en los motores. (Desprecia el tiempo de carga y descarga y asume que el barco se mueve de forma constante).

4. Un incendio en un bosque está quemando un estrecho valle de $2km$ de ancho a una velocidad de $32km/h$. El fuego puede contenerse mediante un cortafuegos a lo ancho del valle. Si un hombre puede limpiar $2m$ del cortafuegos en 1 minuto, el coste del transporte de cada hombre hasta el cortafuegos es de 12 euros, cada hombre cobra 6 euros/hora, por su trabajo y el valor de la madera es de 1200 euros/km^2 : ¿Cuántos hombres deben enviarse para luchar contra el fuego de manera que el coste sea mínimo?

5. Dada la función
$$f(x,y) = e^{ax+y^2} + b \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$
   (a) Determina el valor de a y b, sabiendo que $f(x,y)$tiene un extremo relativo en $(0,0)$ y que el polinomio de Taylor de 2^o orden de $f(x,y)$en ese punto, toma el valor 6 en el punto $(1,2)$.
   (b) Indica la clase de extremo que presenta $f(x,y)$ en $(0,0)$.

6. A partir de la siguiente función:
$$f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$$
   (a) Dibuja el conjunto de puntos del plano en los que $f(x,y)$ es positiva.
   (b) Calcula sus puntos estacionarios e indica cuáles son extremos relativos.
   (c) Encuentra, si existen, los extremos absolutos o globales de f en $\mathbb{R}^2$.

7. Estudia los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + 3xy - y^2 \\ f(x,y) &= x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \\ f(x,y) &= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y) \quad 0 < x, y < 2\pi \end{aligned}$$

8. Demuestra que el origen es el único punto crítico de la función
$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$
   (a) ¿Es un punto de máximo o de mínimo relativo?
   (b) Encuentra 2 rectas que pasen por el origen tal que en una de ellas sea $f > 0$ y en la otra $f < 0$. ¿Porqué es posible encontrar estas rectas?

9. **(Optimización de funciones compuestas)** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real, sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real monótona creciente. Si definimos la función compuesta como $G = h \circ f$, se pide:
   (a) Demuestra que si x^* es un mínimo, máximo o punto de silla de f, también lo es de G.

(b) Si f y h son diferenciables en x^* y $c = f(x^*)$ respectivamente. Demuestra que si $h'(c) \neq 0$ entonces un punto x^* es crítico para G si y sólo si es crítico para f.

(c) Aplica los apartados anteriores para determinar los óptimos locales de la función $G(x,y) = \exp\left\{57x(\ln x)^2 + y^2\right\}$ sobre $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \quad x > 0\right\}$.

10. Encuentra los extremos de las siguientes funciones sobre los conjuntos correspondientes:

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = xy\left(1 - x^2 - y^2\right) & \text{en } \Omega_1 = [0,1] \times [0,1] \\ f_2(x,y) = xy & \text{en } \Omega_2 = \text{ Triángulo de vértices } (0,0) - (1,0) - (0,1) \end{array}$$

11. Determina, de entre todos los polígonos de n lados que se pueden inscribir en una circunferencia el de área máxima y el de perímetro máximo. (Ayuda: resuelve el problema caracterizando los polígonos por la amplitud de sus ángulos centrales).

12. Un alambre de longitud L se divide en 2 partes, con las que construímos un cuadrado y una circunferencia. ¿Cuál debe ser la longitud de cada una de las partes para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea la menor posible?

13. Determina la distancia mínima entre las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 5$.

14. **(Contraejemplo de Peano)** Para a y b constantes reales considera la función

$$f(x,y) = \left(x - a^2y^2\right)\left(x - b^2y^2\right)$$

(a) Clasifica el punto $\mathbf{x} = (0,0)^T$.

(b) Muestra que $f(x,y)$ tiene un máximo en el origen sobre la curva

$$x = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)y^2$$

15. Dada la función

$$f(x,y) = \left[x^2 + (y+1)^2\right]\left[x^2 + (y-1)^2\right]$$

Clasifica los siguientes puntos: $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (0,-1)$, $x_4 = (1,1)$.

16. Se quiere construir un contenedor para transportar material entre dos puertos. Si la cantidad de material que hay que transportar es de $400m^3$ y los costes del transporte son: 1000 euros cada viaje entre los puertos, 120 euros/m^2 el coste del material de la tapa y el fondo del contenedor y 30 euros/m^2 el material de los lados del contenedor. Resuelve el problema para que el coste sea mínimo.

17. **(Condiciones de orden superior)** ¿Es posible extender las condiciones suficientes para funciones de una variable a funciones multivariantes? es decir, ¿qué les ocurre a los extremos locales con las derivadas de orden superior para una función multivariable?. Comprueba lo qué ocurre en el punto $(0,0)$ y la función $f(x,y) = \left(y^2 - x\right)y^2 - 2x$. Aplica el resultado a la función $f(x,y) = x^3 + y^3$.

18. Determina, si existen, los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y,z) = y$ sobre el conjunto

$$F = \left\{x^2 + z^2 = 9; x + y + z = 1\right\}$$

Determina los valores óptimos aproximados de $f(x,y,z)$ sobre el conjunto

$$F' = \left\{x^2 + z^2 = 9.25; x + y + z = 1\right\}$$

19. Determina los puntos de la elipse que se obtienen al cortar el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$, cuyas distancias al origen sean respectivamente máxima y mínima.

20. Dado el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & z \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ & 2x + y - z = 2 \end{array}$$

Se sabe que los puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{10 + \sqrt{265}}{15}, \frac{5 + \sqrt{265}}{15}, \frac{-1 + \sqrt{265}}{3}\right) \\ P_2 &= \left(\frac{10 - 2\sqrt{265}}{15}, \frac{5 - \sqrt{265}}{15}, \frac{-1 - \sqrt{265}}{3}\right) \end{aligned}$$

son los únicos puntos estacionarios de la función z dentro de la región factible.

(a) Estudia si son o no extremos (relativos o globales) condicionados.
(b) Encuentra, si existen, los valores óptimos aproximados del problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & z \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2+z^2=36.05 \\ & 2x+y-z=2 \end{array}$$

21. De entre los triángulos rectángulos de área 9, encuentra aquellos cuya hipotenusa sea mínima.

22. Resuelve el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-1=0 \\ & x+2y-3z=0 \end{array}$$

23. Participas en un concurso de televisión en el que se entrega una chapa metálica de $25m^2$ de superficie y con la que debes construir una caja rectangular, que se llenará gratuitamente de gasolina. Se pide:

    (a) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja que maximizan tu beneficio?
    (b) Si el litro de gasolina cuesta 2 euros. ¿Cuánto estarías dispuesto a pagar por $1cm^2$ más de chapa?

24. Halla la mínima distancia entre la recta $x+y=4$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$

25. De entre todos los paralelepípedos rectángulos cuya suma de las aristas es la misma e igual a k, determina aquel que tiene volumen máximo.

26. Traza por un punto dado un plano que forme con los planos coordenados un tetraedro de volumen mínimo. Se supone el sistema de referencia cartesiano rectangular.

27. Maximiza la distancia al origen de los puntos de la elipse intersección del cilindro de ecuación $x^2+y^2=4$ con el plano $x+y+z=5$.

28. Halla la máxima distancia al origen de los puntos de la circunferencia de centro $(2,1)$ y radio 3.

29. Maximiza la función $f(x,y,z)=3+x^2+2y^2+4y-2x+(z-2)^2$, sujeta a la restricción $2x+4y+z=0$.

30. Resuelve el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x^2y \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2=1 \end{array}$$

31. Determina los óptimos de $f(x,y,z)=xy+yz+zx$, sujeto a la restricción $x+y+z=120$

32. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & -x^2+2y+z \\ \text{Sujeto a} & x+2y-z=0 \\ & 2y+z=0 \end{array}$$

33. Dados los problemas

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & x^2+y^2 \\ \text{Sujeto a} & (x-1)^3-y^2=0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \text{Minimizar} & (x-2)^2+y^2 \\ \text{Sujeto a} & (x-1)^3-y^2=0 \end{array}$$

    Se pide:

    (a) Resuélvelos gráficamente.
    (b) Resuélve cada problema mediante el método de los multiplicadores.
    (c) Explica porqué no se puede resolver uno de ellos por este método.

34. Un meteoro se mueve a lo largo de la trayectoria de ecuación

$$y=x^2+3x-6$$

    Una estación espacial se encuentra en el punto $(x,y)=(2,2)$. Utiliza las condiciones de KKT para encontrar el punto más cercano entre el meteoro y la estación.

35. Se va a manufacturar una remesa de cajas de cartón rectangulares, de forma que las caras superior, inferior y frontal sean de doble peso (es decir, dos piezas de cartón) que las otras. Halla el tamaño de las cajas que maximicen el volumen, teniendo en cuenta que para cada caja se va contar con $72cm^2$ de cartón.

36. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \\ \text{Sujeto a} & px+qy+rz=s \end{array}$$

Donde $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$, y $a, b, c \neq 0$.

37. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z} \\ \text{Sujeto a} & px+qy+rz=s \end{array}$$

donde a, b, c, p, q, $r \in \mathbb{R}^+$.

38. Resuelve el siguiente problema utilizando el método de los multiplicadores

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & xyz \\ \text{Sujeto a} & px+qy+rz=s \end{array}$$

donde a, b, c, p, q, $r \in \mathbb{R}-\{0\}$.

39. Calcula los valores máximo y mínimo que alcanza la función $f(x,y)=y-x$ sobre el conjunto $F=\left\{4x^2+y^2\leq 8; e^{x-y}\leq 1\right\}$. Indica en qué puntos se alcanzan esos valores. ¿Cómo cambiarían los valores óptimos de la función objetivo si la región fuera $F'=\left\{4x^2+y^2\leq 8.05; e^{x-y}\leq 1.05\right\}$?

40. Un paraboloide elíptico de ecuación

$$x=\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q},\ p>0,\ q>0$$

se corta por un plano de ecuación $x=a$. En la porción de paraboloide así determinada se inscribe un paralelepípedo recto. Determina sus dimensiones para que tenga volumen máximo.

41. Halla los óptimos relativos y absolutos, si los hay, que alcanza $f(x,y,z)=z$, sobre el conjunto $F=\left\{x^2+y^2\leq 4; x+y+z=5\right\}$

42. Resuelve el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x^2+2(y-1) \\ \text{Sujeto a} & x+y^2\leq 1 \end{array}$$

43. Realiza la descomposición del número 6 en 3 sumandos, de forma que:

(a) Su producto sea máximo.

(b) Su producto sea mínimo.

(c) ¿Qué se puede decir si los tres números son no negativos?

44. Halla, si existen, los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y)=x^2y$ sobre el conjunto de los puntos que cumplen $x^2+y^2\leq 1$.

45. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j \\ \text{Sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j^2}{K_j}\leq D \\ & x_j\geq 0;\ \forall j \end{array}$$

donde K_j, D son constantes reales positivas.

46. Sea C el arco de curva intersección de la superficie de ecuación $2z=16-x^2-y^2$ con el plano $x+y=4$, contenido en el primer octante del espacio $\{x,y,z\geq 0\}$. Encuentra, si existen, los puntos de C, cuya distancia al origen sea máxima y mínima, así como los valores de esas distancia máxima y mínima.

Si C' es ahora el arco de curva intersección de la superficie de ecuación $2z=17-x^2-y^2$ con el plano $x+y=3.5$, contenido en el primer octante del espacio, calcula los valores de las distancias máxima y mínima de los puntos C' al origen.

47. Encuentra los puntos del conjunto B que están más cerca del origen de coordenada, siendo B:

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x+y\geq 4;\ 2x+y\geq 5\right\}$$

(a) Formula y resuelve el problema de forma gráfica.

(b) Comprueba que el punto óptimo cumple las condiciones de K.K.T. ¿Son también suficientes?

48. Resuelve mediante el método de los multiplicadores de K.K.T. el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & z \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2 \leq 8 \\ & x+y+z \geq 1 \\ & x+y+z \leq 4 \geq 0 \end{array}$$

49. Un comerciante se ha enterado de que en la fábrica de aceite hay una oferta de aceite de oliva extra. El aceite que compre a la fábrica lo podrá vender después por litros, ganándose 1 euro por litro. Para almacenar el aceite va a construir un déposito cilíndrico con tapa, utilizando $25\pi m^2$ de chapa. Como desea optimizar sus ganancias, pregunta a su hijo, que es matemático, cuáles son las dimensiones del depósito de máxima capacidad que se podría construir, y obtiene como respuestas $h = 10/\sqrt{6}m$ de altura y $r = 5/\sqrt{6}m$ de radio de las bases.

Cuando va a iniciar la construcción del depósito, su amigo, el de la ferretería, necesita urgentemente $1m^2$ de chapa como la que él tiene y le propone comprárselo. ¿A qué precio debería vendérselo?

50. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & (x-4)^2+(y-2)^2 \\ \text{Sujeto a} & x+y-2 \leq 0 \\ & -1+x^2+(y-1)^2 \end{array}$$

(a) Discute las soluciones del problema mediante los multiplicadores de K.K.T.

(b) Discute los cambios en la solución del problema si ahora la primera restricción se transforma en: $x+y-2.05 \leq 0$

51. Comprueba gráficamente que el punto $(1, 0)$ es una solución óptima del siguiete problema, pero que no cumple las condiciones de K.K.T. Explica el resultado:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & x \\ \text{Sujeto a} & y-(1-x)^3 \leq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

52. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & (x-7)^2+(y-10)^2 \\ \text{Sujeto a} & y-8 \leq 0 \\ & (x-10)^2+(y-10)^2-36 \leq 0 \end{array}$$

(a) Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

(b) ¿Qué sucede con la solución del mismo si ahora la primera restricción se transforma en: $y-8.05 \leq 0$?

53. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x+y \\ \text{Sujeto a} & x^2+\dfrac{y^2}{4} \leq 1 \\ & y-x^2-1 \geq 0 \end{array}$$

Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

54. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & (x-2)^2+(y-2)^2 \\ \text{Sujeto a} & y-5 \leq 0 \\ & (x-4)^2+(y-4)^2-16 \leq 0 \end{array}$$

Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

55. Determinar gráficamente el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = x^2+(y-4)^2$ sobre el conjunto $F = \{(x,y)\,|x+y \geq 3; -x+y \leq 3; x \leq 2\}$.

Plantea las condiciones de K.K.T. del problema anterior y utiliza la gráfica para deducir qué restricciones son activas y cuales inactivas en los puntos de máximo y mínimo. Calcular a partir de los datos anteriores esos valores máximo y mínimo.

¿Qué ocurrirá con los valores máximo y mínimo de $f(x,y)$ sobre el conjunto $F = \{(x,y)\}\, x+y \geq 3.01; -x+y \leq 3.02; x \leq 2.05$?