Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Problemas de Optimización Estática (Curso 2008/2009)
Hoja 1 - Convexidad

1. Si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, demuestra que
   (a) $\Omega_1 \pm \Omega = \{\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2 \in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}_1 \in \Omega_1; \mathbf{x}_2 \in \Omega_2 \}$ es convexo.
   (b) $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es convexo.
2. Prueba la convexidad del conjunto Ω definido por
$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0; i = 1, \ldots, n \right\}$$
3. Demuestra la convexidad del conjunto
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in\mathbb{R}^2 \mid y \leq 3 - x^2 \right\}$$
4. Probar si es o no convexo el conjunto
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in\mathbb{R}^2 \mid y = e^x \right\}$$
5. Siendo $r > 0$ y $\mathbf{a} \in\mathbb{R}^n$, prueba que la bola abierta de centro $\mathbf{a}$ y radio r es un conjunto convexo.
6. Demuestra que si $f(\mathbf{x})$ es una función convexa definida sobre un conjunto Ω convexo y no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto
$$S = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid f(\mathbf{x}) \leq K\}$$
es convexo para cualquier valor de $K \in \mathbb{R}$.
7. Prueba que los siguientes conjuntos son convexos
$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \right\} \\
\Omega_2 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 \leq 4,\ 6x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\} \\
\Omega_3 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \leq 1,\ x_2 \geq 0 \right\} \\
\Omega_4 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 3,\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \right\}
\end{aligned}$$

8. Estudia la concavidad o convexidad en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ de las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2) &= (x_1-3)^2+(x_2+1)^2 \\
f_2(x_1,x_2) &= (x_1-2)^2+x_2^3 \\
f_3(x_1,x_2) &= \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0 & (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases} \\
f_4(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_1x_2
\end{aligned}$$

9. ¿Será convexa la función $f_2(x_1,x_2)$ del problema anterior en el conjunto abierto y convexo

$$\Omega_1=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1>0,\ x_2>0\right\}?$$

¿Y $f_4(x_1,x_2)$ sobre el abierto convexo

$$\Omega_2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0\right\}?$$

10. Para los problemas de optimización siguientes

(a) Optimizar x_1+x_2
s. a.
$$\begin{array}{c} 2x_1+2x_2\leq 3 \\ 9x_1+2x_2\leq 6 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{array}$$

(b) Optimizar $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$
s.a.
$$\begin{array}{c} x_1+2x_2\leq 4 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{array}$$

se pide:

(a) El análisis de su convexidad.
(b) ¿Qué se puede decir de sus extremos locales y globales?
(c) La resolución geométrica del problema.